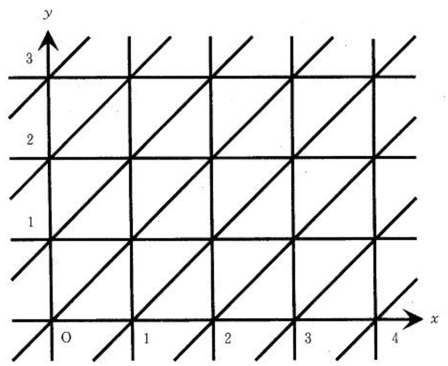
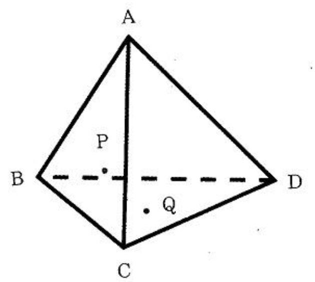
2000 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１．xy 平面全体が下図のような直線の配列で埋められているとする。



このとき、点 $A\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ と $P\left(m+\dfrac{2}{3},n+\dfrac{1}{3}\right)$ について、A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし、m , n は負でない整数であるとする。



２．四面体 ABCD を考える。
面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくとき、$x:y=s:t$ ならば、線分 AQ と DP が交わることを示せ。

３．二つの関数 $f(x)=x(1-x)$ ， $g(x)=\dfrac{2x}{2+x}$ を用いて、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$0<a_0=b_0<\dfrac{1}{2}$ ，$a_{n+1}=f(a_n)$, $b_{n+1}=g(b_n)$ （ $n=0,1,2,\cdots$ ）

によって定める。次の問いに答えよ。

(1) $0<x<\dfrac{1}{2}$ において、$f(x)$は単調増加であることを示せ。

また、$x>0$ のとき、$f(x)<g(x)<x$ であることを示せ。

(2) $n=1,2,\cdots$ に対して、$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(3) b_n を求めよ。

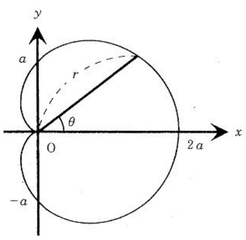
４．関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x}$ を考える。$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の導関数を求めよ。

(2) $f(x)$の最小値を求めよ。またその最小値を与える x に対して、$\cos x$ の値を求めよ。

(3) $y=f(x)$のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

５．$a>0$ を定数として、極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$により表わされる曲線 C_a を考える。



次の問いに答えよ。

(1) 極座標が$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を、極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P\neq Q$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が$(2a,0)$の点と P との距離の最大値を求めよ。

◆文系

１．次の問いに答えよ。

(1) 点$(1, 0)$を通って傾きが-4の直線と、関数$y = x^2 - 4x$のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2) 二つの関数$y = x^2 - 4x$, $y = k(x - a)$のグラフが、どんなkの値に対しても、$-2 \leqq x \leqq 2$の範囲で少なくとも一つの共有点をもつようなaの値の範囲を求めよ。

２．三角形 ABC において$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$とする。次の問いに答えよ。

(1) 実数s, tが$0 \leqq s + t \leqq 1$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$の範囲を動くとき、次の条件をみたす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (2s + t)\vec{a} + (s - t)\vec{b}$

(2) (1)の各場合に、点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

３．理系１と同じ