2002 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

1．0 でない複素数 z に対して、$w=u+vi$ を $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ とするとき、次の問に答えよ。

ただし、u , v は実数, i は虚数単位である。

(1) 複素平面上で、z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき、w はどのような曲線を描くか。u , v がみたす曲線の方程式を求め、その曲線を図示せよ。

(2) 複素平面上で、z が実軸からの偏角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき、w はどのような曲線を描くか。u , v がみたす曲線の方程式を求め、その曲線を図示せよ。

2．正の整数 n に対して、連立不等式は次の関係をみたす。

$\begin{cases} 0<x\leqq n \\ x\leqq y\leqq 3x \end{cases}$ の表わす領域を D_n とする。次の問に答えよ。

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $\mathrm{P}(x, y)$ の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし、格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数である点のことである。

(2)原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を始点とし、領域 D_n の格子点 $\mathrm{P}(x, y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は、ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(1,1)$, $\overrightarrow{v_2}=(1\,2)$, $\overrightarrow{v_3}=(1,3)$ と 0 以上の整数 m_1 , m_2 , m_3 を用いて、

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ で表されることを証明せよ。

3．正の実数 a , b に対して、2 つの曲線 $C_1 : ay^2=x^3$ ($x\geqq 0$, $y\geqq 0$) , $C_2 : bx^2=y^3$ ($x\geqq 0$, $y\geqq 0$)の原点 O 以外の交点を P とする。次の問に答えよ。

(1) 交点 P の座標を求め、2 つの曲線 C_1 , C_2 の概形を描け。

(2) 2 つの曲線 C_1 , C_2 で囲まれる部分の面積を a と b で表せ。また、この面積が一定値 S であるように a , b が動くとき、点 P の軌跡の方程式を求めよ。

４．関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする。次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であることの定義を述べよ。

(2) 次の 2 つの命題のうち正しいものを選び、それが正しい理由を示せ。

(i) $f(x)$ が $x = a$ において連続ならば、必ず、$f(x)$ は $x = a$ において微分可能である。

(ii) $f(x)$ が $x = a$ において連続であっても、必ず、$f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるとは限らない。

(3) 関数 $f(x) = \cos x$ が $x = a$ において微分可能であることを、(1)で答えた定義を用いて証明せよ

５．数字 $1, 2, \cdots, N$ の書かれたカードが1枚ずつ N 枚入っている箱から、元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで、$2 \leqq k \leqq N$ とする。引いたカードの順に、書かれている数字を $x_1, x_2, \cdots, x_k$ とする。次の問に答えよ。

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, すなわち k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2) i は整数で、$2 \leqq i \leqq k$ をみたすとする。

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} \\ x_{i-1} > x_i \end{cases}$$

である確率、すなわち、k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き、i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

(3) N は 5 以上の整数で、$k = 5$ とする。$2 \leqq i \leqq 5$ をみたす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき、得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき、得点の期待値を求めよ。

◆文系

１．数列 $\{a_n\}$ は、初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり、

$$\begin{cases} 8 \leqq a_2 \leqq 10 \\ 14 \leqq a_4 \leqq 16 \\ 19 \leqq a_5 \leqq 21 \end{cases}$$

をみたしているとする。このような数列 $\{a_n\}$ をすべて求めよ。

２．実数 t に対して、xy 平面上の直線$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問に答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また、接線の座標を求めよ。

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき、直線の通過する範囲を図示せよ。

３．次の問に答えよ。

(1) 方程式 $x^2+y^2+ax+by+3c=0$ が円を表わすための a , b , c の条件を求めよ。

(2) 一つのサイコロを 2 回振って出た目の数を、順に a , b とする。$c=1$ とするとき、a , b の組が(1)の条件をみたす場合は何通りあるか。

(3) 一つのサイコロを 3 回振って出た目の数を、順に a , b , c とする。a , b , c が(1)の条件をみたす確率を求めよ。