2003 年　神戸大学　数学入試問題

◆理系

１．次の問に答えよ。ただし、i は虚数単位とする。

(1) 複素数 z に対し、$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき、複素平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対し、$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}, w_2=\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$ とする。$z\neq\pm i$ のとき、複素平面上で w_1 を表す点を P , w_2 を表す点を Q とする。P , Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。

２．三角形 ABC があり、$\mathrm{AB}=2$, $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{CAB}>\dfrac{\pi}{4}$ とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし、辺 $\angle\mathrm{CAH}=\alpha$ とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A , X , H を通る円の中心を P，半径を r，$\angle\mathrm{PAH}=\theta$ とする。この円と直線 AC との交点で、A と異なる点を Y とする。次の問に答えよ。

(1) $\cos\theta$ を r を用いて表せ。

(2) AX + AY を r と α を用いて表せ。

(3) X のとり方によらず、AX + AY が常に一定の値になるときの α の値を求めよ。

３．関数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2-3x+18}$ とする。次の問に答えよ。

(1) $f(x)$の極小値をすべて求めよ。

(2) $f(x)$の最小値を求めよ。ただし、必要ならば $e>2.7$ を用いてよい。

４．$f(x)$は実数全体で定義された何回も微分可能な関数で $f(0)=0$, $f(\pi)=0$ をみたすとする。次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x dx=-\int_0^\pi f''(x)\sin x dx$ を示せ。

(2) $f(x)=x(x-\pi)$のとき、実数 a に対し $F(a)=\displaystyle\int_0^\pi \{af(x)-\sin x\}^2 dx$ とする。a を変化させたとき、$F(a)$を最小にする a の値を求めよ。

５．座標平面上の点(p, q)で、p と q がともに整数であるものを格子点という。次の問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し、$p+2q=n$, $p>0$, $q>0$ をみたす格子点(p, q)の個数を a_n とする。a_n を求めよ。

(2) 自然数 n に対し、$p+2q<n$, $p>0$, $q>0$ をみたす格子点(p, q)の個数を b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ と $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

◆文系

１．複素数平面上の 3 点 $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$は正三角形の頂点であり、左まわり（反時計まわり）に並んでいるとする。次の問に答えよ。

(1) 2 つの複素数 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$, $\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$ の値を求めよ。

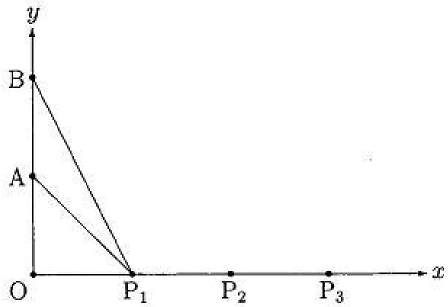
(2) $z_1=2i$, $z_2=-2-2\sqrt{2}i$ のとき、z_3 の値を求めよ。ただし、i は虚数単位とする。

２．実座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(0, 2)$をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を$(k, 0)$とする。自然数 n に対し、$2n$ 本の線分 AP_1 , AP_2 , … , AP_n , BP_1 , BP_2 , … , BP_n により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき、図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問に答えよ。

(1) a_2 , a_3 の値を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表し、その理由を述べよ。

(3) a_n を n を用いて表せ。



３． a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x) = (x+a)(x+1)(x-a)$ について、次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$（$\alpha<\beta$）で極値をとるものとする。2 点 $(\alpha, f(\alpha))$ と $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが、点 $(-1, 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき、a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき、曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。