2004 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１．行列 A , B , C を

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) 積 ABC を計算せよ。

(2) $BCAB=kB$ となる定数 k を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、$(ABC)^n$ を計算せよ。

２．$\alpha=\cos\dfrac{360°}{5}+i\sin\dfrac{360°}{5}$ とする。ただし、i は虚数単位である。

100 個の複素数 z_1 , z_2 , … , z_{100} を $z_1=\alpha$, $z_n=z_{n-1}^3$ （ $n=2$, 3 , … , 100 ）で定める。次の問に答えよ。

(1) z_5 を α を用いて表せ。

(2) $z_n=\alpha$ となるような n の個数を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ。

３．a を正の定数とする。不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

４．t を正の実数とし、k を自然数とする。無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$$

を考える。次の問に答えよ。

(1) 上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき、それを t と k を用いて表せ。

(2) $x>0$ のとき、$F_k(x)=\int_1^x f_k(t)dt$ を計算せよ。

(3) $x>0$ のとき、$\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x)$ を求めよ。

５．次のようなゲームを考える。下のように 1 から 9 の数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方、9 枚のカードがあり、1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ、順に並べる。カードを並べた順に見て、カードに書いてある数字を表から消し、かわりに＊印を書き込む。この表で縦、横あるいは斜めのいずれかに＊印が 3 つはじめて並んだ時、その時点で表にある＊印の個数を得点とする。例えば、最初の 4 枚のカードが、順に 5 , 4 , 6 , 9 であれば。以下のように変化する。

*	2	8
1	9	3
7	4	6

*	2	8
1	9	3
7	*	6

*	2	8
1	9	3
7	*	*

*	2	8
1	*	3
7	*	*

その結果、＊印がはじめて 3 つ並んだ。このとき、得点は 4 である。次の問に答えよ。

(1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また、得点が最小となる確率を求めよ。

(2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また、得点が最大となる確率を求めよ。

◆文系

１．平行四辺形列 $ABCD$ において、対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M, 辺 AB を $2:3$ に内分する点を N, 辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を L とし、AL と CN の交点を P とする。次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{BA}=\vec{a}\,,\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{BP}$ を $\vec{a}\,,\vec{c}\,,t$ を用いて表せ。

(2) 3 点 $P\,,M\,,D$ が一直線上にあるとき、t の値を求めよ。

２． a を正の実数とする。関数 $f(x) = -x^2 + ax$ について次の問に答えよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$上の点 P(t , $f(t)$)を通る接線の方程式を a , t を用いて表せ。

(2) 点 A($-$a , $4a^2 - 5a + 2$)から曲線 $y = f(x)$へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3) その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l , 接点を P(t , $f(t)$)とする。このとき、$0 < t < a$ をみたすための a の範囲を求めよ。

(4) $a = 1$ のとき、直線 $x = -1$, 接線 l と曲線 $y = f(x)$で囲まれた図形の面積を求めよ。

３. 初項が 1 で交差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_nとする。$n \geqq 3$ のとき、次の問に答えよ。

(1) $S_n = 94$ となる n と d がちょうど一組ある。その n と d を求めよ。

(2) $S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。