

## ◆理系

1.  $O$  を原点とする空間の 3 点  $A(1, 1, 1), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1)$  がある。

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left( \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA}$$

をみたす点を  $D$  とする。ただし、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  は  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  の内積を表す。次の問に答えよ。

(1)  $D$  の座標を求めよ。

(2) 2 つの実数  $s$  と  $t$  に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  を満たす点を  $P$  とする。 $t$  を固定して考えたとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$  を最小にする  $s$  を  $t$  を用いて表せ。

(3)  $|\overrightarrow{CP}|^2$  を最小にする  $s$  と  $t$  の値を求めよ。

(4) (3) で求めた  $s$  と  $t$  の値をそれぞれ  $s_0$  と  $t_0$  とする。 $s_0$  と  $t_0$  に対し、 $P_0$  を  $\overrightarrow{OP}_0 = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$  を満たす点とする。

$$\overrightarrow{OP}_0 = \left( \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} + \left( \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2} \right) \overrightarrow{OD}$$

となることを示せ。

2.  $a$  を正の実数とする。 $xy$  平面の放物線  $C: y = x^2$  上に点  $A(-a, a^2)$  をとる。 $s > 0$  のとき、 $x$  軸上の点  $P(s, 0)$  に対して、直線  $AP$  と  $C$  の 2 つの交点のうち、 $A$  とは異なる交点を  $Q(t, t^2)$  とする。 $Q$  から  $x$  軸に下ろした垂線と  $x$  軸の交点を  $P'(t, 0)$  とする。いま、 $x$  軸上の点  $P_1(c, 0)$  ( $c > 0$ ) から出発して、点  $P$  に対して点  $Q, P'$  を定め、この方法を繰り返して、 $P_1, P_2, P_3, \dots$  と  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  を定める。次の問に答えよ。

(1)  $t$  を  $a$  と  $s$  を用いて表せ。

(2) 点  $P_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) の  $x$  座標を  $x_n$  とする。数列  $\{u_n\}$  を  $u_n = \frac{1}{x_n}$  で定める。 $\{u_n\}$  の

一般項を求めよ。

(3) 直角三角形  $P_n Q_n P_{n+1}$  の面積を  $S_n$  で表す。自然数  $r$  を選んで、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$  が正の実数値に収束するようにできる。このような  $r$  の値とそのときの極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$  を求めよ。

3.  $a$  を実数とし、 $a > 1$  とする。点  $P(1, a)$  を通り、円  $C: x^2 + y^2 = 1$  と接する 2 本の直線のうち、 $x = 1$  とは異なる直線を  $l$  とする。 $l$  と  $x$  軸の交点を  $Q$  とする。次の間に答えよ。

(1)  $A(1, 0)$  とする。線分  $QA$  の長さ  $L$  を  $a$  を用いて表せ。

(2) 三角形  $PQA$  の面積を  $S$  とする。 $a$  が  $a > 1$  の範囲を動くとき、 $S$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

4. 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。次の間に答えよ。

(1)  $g(x) = f(f(x))$  とおく。関数  $y = g(x)$  のグラフを書け。

(2)  $n$  を自然数とする。 $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$  を求めよ。

5.  $A, B, C, D$  4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている。それぞれのカードには 1 から 9 までの数字が 1 つが書かれている。 $A, B, C, D$  の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする。

(i) 袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき、カードに書かれている数字の期待値は、 $A, B, C, D$  すべて同じである。

(ii)  $p(A, B) = p(B, C) = p(C, D) = p(D, A) = \frac{2}{3}$  である。ここで、 $p(X, Y)$  は袋  $X$

と袋  $Y$  からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき、 $X$  から抜いたカードに書かれている数字が  $Y$  から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。

(iii)  $A, B, C$  の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で、 $D$  の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。

(iv)  $A$  の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である。

次の問に答えよ。

- (1) A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と、D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。
- (2) B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。
- (3) C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。

## ◆文系

1. 三角形  $OAB$  において、辺  $OA$ 、辺  $OB$  の長さをそれぞれ  $a, b$  とする。また、角  $AOB$  は直角でないとする。2 つのベクトル  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  の内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を  $k$  とおく。次の問に答えよ。

- (1) 直線  $OA$  上に点  $C$  を、 $\overrightarrow{BC}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と垂直になるようにとる。 $\overrightarrow{OC}$  を  $a, k, \overrightarrow{OA}$  を用いて表せ。
- (2)  $a = \sqrt{2}, b = 1$  とする。直線  $BC$  上に点  $H$  を、 $\overrightarrow{AH}$  が  $\overrightarrow{OB}$  と垂直になるようにとる。 $\overrightarrow{OH} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$  とおくと、 $u$  と  $v$  をそれぞれ  $k$  で表せ。

2.  $a$  を正の実数とする。関数  $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$  が次の 2 つの条件

(i)  $-3 \leq x < 0$  のとき、 $f(x) \geq -1$

(ii)  $x \geq 0$  のとき、 $f(x) \geq 0$

をともに満たすような  $a$  の値の範囲を求めよ。

3.  $a$  を正の実数とする。次の問に答えよ。

- (1)  $y = |x^2 - a|x||$  のグラフをかけ。
- (2)  $F(a) = \int_{-1}^1 |x^2 - a|x|| dx$  を求めよ。
- (3)  $F(a)$  の最小値を求めよ。