2006 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１．平面上に原点 O から出る、異なる 2 本の半直線 OX , OY をとり、$\angle \mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を、半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問に答えよ。

(1) 点 C が$\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき、ベクトル$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数tを用いて

$$\vec{c} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表されることを示せ。

(2) $\angle \mathrm{XOY}$ の二等分線と$\angle \mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおくとき、$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を$\vec{a}, \vec{b}$および 3 辺の長さ$|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{b} - \vec{a}|$を用いて表せ。

２．行列$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$と、実数$x, y, z, w$を成分とする行列$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$を考える。

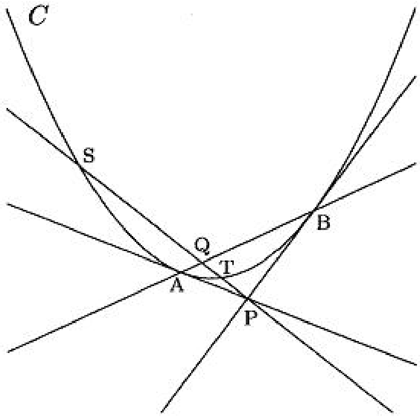
次の問に答えよ。

(1) Xについて関係式$XA = AX$が成立するための、x, y, z, wの条件を求めよ。

(2) Xが$X^2 = A$を満たすとき、$XA = AX$が成立することを示せ。

(3) $X^2 = A$を満たす行列Xをすべて求めよ。

３．xy 平面において放物線 $C : y = x^2$ と、その下側にある点 P(p , q) ($q < p^2$)を考える。P を通るような C の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ A , B とする。また、P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S , T で交わるとする。



点 A , B の x 座標をそれぞれ a , b とし、点 S , T の x 座標をそれぞれ s , t とする。次の問に答えよ。

(1) $a+b$, ab を p , q で表せ。

(2) $s+t$, st を p , q , m で表せ。

(3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし、Q の x 座標を u とする。上図のように $s < u < t < p$ となる場合について、等式 $\dfrac{1}{PS} + \dfrac{1}{PT} = \dfrac{2}{PQ}$ が成立することを示せ。

４．xyz 空間に 3 点 P(1 , 1 , 0) , Q(- 1 , 1 , 0) , R(- 1 , 1 , 2)をとる。次の問に答えよ。

(1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき、平面 $z = t$ と、△PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) △PQR を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

５．$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし、i は虚数単位である。次の問に答えよ。

(1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p , q は実数)を求めよ。

(2) 整数 a , b , c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、解の 1 つは α であり、また、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 (a , b , c) をすべて求めよ。

◆文系

１．平面上に原点 O から出る、異なる 2 本の半直線 OX , OY をとり、$\angle XOY < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を、半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。次の問に答えよ。

(1) 点 C が∠XOY の二等分線上にあるとき、ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて

$$\vec{c} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表されることを示せ。

(2) ∠XOY の二等分線と∠XAB の二等分線の交点を P とおく。$OA = 2$, $OB = 3$, $AB = 4$ のとき、$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

２．実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_1 : y = 2tx - t^2$ $\ell_1 : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問に答えよ。

(2) 点 P を通る直線 l_1 はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき、直線 l_1 が通る点(x, y)の全体を図示せよ。

３．$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし、i は虚数単位である。次の問に答えよ。

(2) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p , q は実数)を求めよ。

(2) 整数 a , b , c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、解の 1 つは α であり、また、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 (a , b , c) をすべて求めよ。