

2007 年

神戸大学 数学入試問題

◆理系

1. 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) \overrightarrow{OQ} を \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OR} を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意の点 E, F をとるとき、線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

2. xy 平面において、O を原点、P を第 1 象限内の点とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) 2 点 O, P を頂点とし、 y 軸上に底辺を持つ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2) T を(1)で求めた軌跡とし、 a を実数とする。このとき、軌跡 T と直線 $y = a(x - 1)$ が第 1 象限内で交点をもつような、 a の範囲を求めよ。

3. $f(x) = e^x - x$ について、次の間に答えよ。

(1) 実数 x について $f(x) \geq 1$ であることを示せ。

(2) t は実数とする。このとき、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t, x = t - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

4. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ で表される曲線を C とおく。このとき、次の間に答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

5. 次の問に答えよ。

- (1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚、2 の数字を書いたカードを 3 枚、3 の数字を書いたカードを 3 枚、計 9 枚用意する。この中から無作為に、一度に 3 枚のカードを選んだとき、カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。

◆文系

1. 次の問に答えよ。

- (1) 漸化式 $x_{n+1} - a = -2x_n + 2a$ (a は定数) で定まる数列 x_1, x_2, x_3, \dots の一般項 x_n を x_1, a を用いて表せ。
- (2) xy 平面において曲線 $C: y = f(x) = x^3 - 3ax^2$ (a は定数) を考える。C 上に点 $P_1(t_1, f(t_1))$ とする。ただし、 $t_1 \neq a$ とする。P₁ における C の接線と C の交点のうち、P₁ と異なるものを $P_2(t_2, f(t_2))$ とする。t₂ を t₁, a を用いて表せ。
- (3) さらに、P₂ における C の接線と C の交点のうち、P₂ と異なるものを P₃ とする。以下同様に P₄, P₅, P₆, … を定める。P₁, P₂, P₃, … はすべて相異なることを示せ。

2. xy 平面における曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = ax$ (a は正の定数) について、次の問に答えよ。

- (1) l と平行な、C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ。
- (3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を一辺とする四角形 OPQR が長方形になるように、 m 上に 2 点 Q, R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。

3. 次の問に答えよ。

- (1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚、2 の数字を書いたカードを 3 枚、3 の数字を書いたカードを 3 枚、計 9 枚用意する。この中から無作為に、一度に 3 枚のカードを選んだとき、カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。