2008年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

1．実数 x , y に関する次の命題の真偽を答えよ。さらに、真である場合には証明し、偽である場合には反例をあげよ。

(1) $x>0$ かつ $xy>0$ ならば、$y>0$ である。

(2) $x \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば、$y \geqq 0$ である。

(3) $x+y \geqq 0$ かつ $xy \geqq 0$ ならば、$y \geqq 0$ である。

2．xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(-1,0)$, $\mathrm{C}(0,\sqrt{3})$ をとる。このとき、次の問に答えよ。

(1) A , B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2) (1)で求めた r の値について、C を中心とする半径 r の円が、A , B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらにも接することを示せ。

(3) A , B , C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。

3．1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき、次の問に答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば、n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) S が 4 の倍数ならば、n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

4．xy 平面に 5 点 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(2,2)$, $\mathrm{C}(2,1)$, $\mathrm{D}(4,1)$, $\mathrm{P}(0,3)$をとる。点 P を通り傾き a の直線 l が線分 BC と交わり、その交点は B , C と異なるとする。このとき、次の問に答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 直線 l と線分 AB , 線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 , 直線 l と線分 BC , 線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とするとき、それらの和 $\mathrm{V}=\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2$ を a の式で表せ。

(3) (1)で求めた a の値の範囲で、(2)で求めた V は、$a=-\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ。

５．n , k を自然数とする。このとき、次の問に答えよ。
(1)　$(1+x)^n$ の展開式を用いて、次の等式を示せ。

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$
$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n\,{}_nC_n$$

(2)　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ。

(3)　2次の正方行列 M_1 , M_2 , M_3 , … , M_n は、それぞれが $\dfrac{1}{3}$ の確率で、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかになるとする。n 個の行列の積 M_1 , M_2 , M_3 , … , M_n が $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ。

◆文系

１．x の 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とその導関数 $f'(x)$ について、次の問に答えよ。ただし、a , b , c は定数で $a \neq 0$ とする。
(1)　実数 α , β について、$f(\alpha) = f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ であることを示せ。
(2)　実数 α , β について、$|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha) = f(\beta)$ であることを示せ。

２．1 から n までの自然数 1 , 2 , 3 , … , n の和を S とするとき、次の問に答えよ。
(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、S が偶数であることを示せ。
(2) S が偶数ならば、n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。
(3) n を８で割った余りが 3 または 4 ならば、S が 4 の倍数でないことを示せ。

３．次の問に答えよ。
(1) xy 平面において、$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2c^2$ と直線 $y = x$ が共有点をもたないための a , b , c の条件を求めよ。ただし、a , b , c は定数で $c \neq 0$ とする。
(2) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を、順に a , b , c とする。a , b , c が(1)で求めた条件をみたす確率を求めよ。