2009 年

神戸大学　数学入試問題

◆理系

１．$a\,,b$ は実数で $a > b > 0$ とする。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \log(\,ax + b(\,1 - x\,)) - x\log a - (\,1 - x\,)\log b$$

ただし、$\log x$ は自然対数を表す。このとき、以下のことを示せ。

(1) $0 < x < 1$ に対して、$f''(x) < 0$ が成り立つ。

(2) $f'(c) = 0$ をみたす実数 c が、$0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x に対して、$a\mathrm{x} + b(\,1 - x\,) \geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

２．$f(x) = x^3 - 3x + 1\,,\ g(x) = x^2 - 2$ とし、方程式 $f(x) = 0$ について考える。このとき、以下のことを示せ。

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば、$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる。

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3$ とすれば、$g(\alpha_1) = \alpha_3\,,\ g(\alpha_2) = \alpha_1\,,\ g(\alpha_3) = \alpha_2$ となる。

３．a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x = 0\,,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y \sim \cos(\,x - a\,)\,,\ y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) 図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2) a が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、S を最大にするような a の値と、そのときの S の値を求めよ。

(3) 図形 G を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。

４． 大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて、大きいサイコロの出た目の数 A，および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える、ただし、このゲームには、6 種類の得点 X_n（ $1 \leqq n \leqq 6$ ）があって、それぞれ、次の規則で定められているとする。

$$X_n \begin{cases} A & (A \geqq n \text{ のとき }) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき }) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき }) \end{cases}$$

ここで、a , b は実数の定数である。また、得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) A , B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を答案用紙（省略）に表にそれぞれ記入せよ。

(2) $E_4 - E_3$ を求めよ。

(3) $E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a , b はあるか。あれば求めよ。なければ、そのことを示せ。

５． t を実数として、数列 a_1 , a_2 , $\cdots$ を

$$a_1 = 1 , a_2 = 2t ,$$
$$a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

(1) $t \geqq 1$ ならば、$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ。

(2) $t \leqq -1$ ならば、$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ を示せ。

(3) $-1 < t < 1$ ならば、$t = \cos\theta$ となる θ を用いて、$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ （$n \geqq 1$）となることを示せ。

◆文系

１．以下の問に答えよ。

(1) xy 平面において、$O(0,0)$, $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とする。このとき、

$$(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA})^2+\left|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}\right|^2 \leqq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2) xyz 空間において、$O(0,0,0)$, $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とする。このとき、

$$(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA})^2+\left|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}\right|^2 \leqq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ。

２． a を実数とし、$f(x)=-a^2x^2+4ax$ とする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 2 点 $O(2,3)$, $B(3,3)$ を端点とする線分を ℓ とする。曲線 $y=f(x)$ と線分 ℓ（端点を含む）が共有点を持つような a の値の範囲を求め、数直線上に図示せよ。

３．以下の問に答えよ。

(1) A , B の 2 人がそれぞれ、「石」、「はさみ」、「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで、双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け、「はさみ」は「紙」に勝ち「石に負け、「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け、同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2) 上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ、これらに加えて、4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け、同じ「手」どうしは引き分けとする。A , B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つずつを選ぶとするとき、A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3) 上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ、これらに加えて、さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき、A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには、「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし、同じ「手」どうしの場合、しかもその場合にのみ引き分けとする。