2010 年	# 神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１． a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように、a の値の範囲を定めよ。

２． p を 3 以上の素数, a , b を自然数とする。以下の問に答えよ。ただし、自然数 m , n に対し、mn が p の倍数ならば、m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1) $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき、a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき、a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき、a と b はともに p の倍数であることを示せ。

３． $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$, $g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$ （$x>0$）とする。以下の問に答えよ。ただし、自然対数の底 e について、$e=2.718\cdots$ であること、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを証明なしで用いてよい。

(1) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(2) 区間 $x>0$ において、関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減、極値を調べ、2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3) 区間 $1\leqq x\leqq e$ において、2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$, および直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

４． N を自然数とする。赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし、ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) $n = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}$ に対して、$\mathrm{X} = n$ となる確率 p_n を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

(3) $n = 0, 1, \cdots, \mathrm{N}$ に対して、$\mathrm{Y} = n$ となる確率 q_n を求めよ。

５． 座標平面において、点 $P_n(a_n, b_n)$ ($n \geqq 1$) を実数として、数列 $a_1, a_2, \cdots$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

(1) a_n, b_n を n と θ を用いて表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき、自然数 n に対して、線分 $P_n P_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ。

(3) (2)で求めた l_n に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ。

◆文系

１． 実数 x, y に対して、等式 $x^2 + y^2 = x + y$ … ① を考える。$t = x + y$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) ①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) x と y が①の等式をみたすとき、t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x と y が①の等式をみたすとする。

$$\mathrm{F} = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

を t を用いた式で表せ。また、F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

２． xy 平面上に相異なる 4 点 A , B , C , D があり、線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1 , 2)で、線分 OA と OD の長さは等しく、四角形 ABCD は円に内接している。$\angle \mathrm{AOD} = \theta$ とおき、点 C の x 座標を a , 四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問に答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また、線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とし、20≦S≦40 とするとき、a のとりうる値の最大値を求めよ。

３． 袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0 , 3 , 6 , 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ、1 人で行うゲームを考える。

[ルール] 袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし、一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき、その時点で負けとし、それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく、すべてのカードを取り出せたとき、勝ちとする。

以下の問に答えよ。

(1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(3) このゲームで勝つ確率を求めよ。