

◆理系

1. $i = \sqrt{-1}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 実数 α, β について、等式 $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して、 $z = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$ とおくと、等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z \text{ が成り立つことを示せ。}$$

(3) 2 以上の自然数 n について、等式 $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$ が成り立つことを示せ。

2. 以下の問に答えよ。

(1) t を正の実数とすると、 $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geq 0$ をみたす実数とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

をみたすとき、 $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、(2) で求めた m の最大値を求めよ。

3. n を 2 以上の自然数として、 $S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ。

(2) k を 2 以上の自然数とすると、 $\frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ の値を求めよ。

4. a は正の無理数で、 $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$, $Y = a^2 - 2a$ を考えると、 X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

- (1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) X と Y の値を求めよ。
- (3) a の値を求めよ。ただし、素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

5. 以下の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 1$ において、 $x > 2 \log x$ が成り立つことを示せ。ただし、 e を自然対数の底とするとき、 $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。
- (2) 自然数 n に対して、 $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$ が成り立つことを示せ。

◆文系

1. 実数 x, y に対して、等式 $x^2 + y^2 = x + y \cdots \textcircled{1}$ を考える。 $t = x + y$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\textcircled{1}$ の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。
- (2) x と y が $\textcircled{1}$ の等式をみたすとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) x と y が $\textcircled{1}$ の等式をみたすとする。

$$F = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

を t を用いた式で表せ。また、 F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

2. xy 平面上に相異なる4点 A, B, C, D があり、線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は $(1, 2)$ で、線分 OA と OD の長さは等しく、四角形 $ABCD$ は円に内接している。 $\angle AOD = \theta$ とおき、点 C の x 座標を a 、四角形 $ABCD$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また、線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。
- (2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし、 $20 \leq S \leq 40$ とするとき、 a のとりうる値の最大値を求めよ。

3. 袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ、1 人で行うゲームを考える。

[ルール] 袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし、一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき、その時点で負けとし、それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく、すべてのカードを取り出せたとき、勝ちとする。

以下の問に答えよ。

- (1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。
- (2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。
- (3) このゲームで勝つ確率を求めよ。