

2012 年

# 神戸大学 数学入試問題

## ◆理系

1. 座標平面上に2点  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$  と直線  $l$  があり、 $A$  と  $l$  の距離と  $B$  と  $l$  の距離の和が1であるという。以下の問に答えよ。

- (1)  $l$  は  $y$  軸と平行でないことを示せ。
- (2)  $l$  が線分  $AB$  と交わるとき、 $l$  の傾きを求めよ。
- (3)  $l$  が線分  $AB$  と交わらないとき、 $l$  と原点との距離を求めよ。

2.  $x$  を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = A - xE$  とおく。 $P$  は  $P^2 = P$  をみたすと  
する。以下の問に答えよ。

- (1)  $x$  の値を求めよ。
- (2)  $n$  を自然数とする。 $A^n = a_n P + b_n E$  をみたす  $a_n, b_n$  を  $n$  を用いて表せ。

3.  $x > 0$  に対し関数  $f(x)$  を  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$  と定め、 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  とおく。以下の問に答  
えよ。

- (1)  $\frac{d}{dx} f(x)$  を求めよ。
- (2)  $\frac{d}{dx} g(x)$  を求めよ。
- (3)  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  を求めよ。

4. 自然対数の底を  $e$  とする。以下の問に答えよ。

(1)  $e < 3$  であることを用いて、不等式  $\log 2 > \frac{3}{5}$  が成り立つことを示せ。

(2) 関数  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$  の導関数を求めよ。

(3) 積分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$  の値を求めよ。

(4) (3)で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ。

5. 座標平面上の曲線  $C$  を、媒介変数  $0 \leq t \leq 1$  を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める。以下の問に答えよ。

(1) 曲線  $C$  の概形を描け。

(2) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた部分が、 $y$  軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

## ◆文系

1. 理系 1 と同じ

2.  $a$  を正の実数とする。2つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる 2 点で交わるとし、2つの放物線によって囲まれる部分の面積を  $S(a)$  とする。

以下の問に答えよ。

- (1)  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $S(a)$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $S(a)$  の最大値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

3. 以下の問に答えよ。

- (1) 正の実数  $x, y$  に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

- (2)  $n$  を自然数とする。 $n$  個の正の実数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対して、

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。