

◆理系

1. i を虚数単位とする。以下の問に答えよ。

- (1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。
- (2) n を正の整数とすると $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ。

2. 次の定積分を求めよ。

- (1) $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
- (2) $J = \int_0^1 x^3 \log(x^2+1) dx$

3. $\vec{0}$ とでない 2 つのベクトル \vec{a}, \vec{b} が垂直であるとする。 $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + 3\vec{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。以下の問に答えよ。

- (1) $|\vec{a}| = x, |\vec{b}| = y$ とするとき、 $\sin^2 \theta$ を x, y を用いて表せ。
- (2) θ の最大値を求めよ。

4. m を実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ の共有点を A, B とし、点を O とする。以下の問に答えよ。

- (1) $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ。
- (3) 放物線 $y = x^2$ と (2) の円が A, B, O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。

5. 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における座標が

$$x = \frac{4 + 5 \cos t}{5 + 4 \cos t}, y = \frac{3 \sin t}{5 + 4 \cos t}$$

であるとき、以下の問に答えよ。

- (1) 点 P と原点 O との距離を求めよ。
- (2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t}$ を求めよ。

◆文系

1. 理系 1 と同じ

2. k, x, y, z を実数とする。 k が以下の(1), (2), (3) のそれぞれの場合に、不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) \geq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

- (1) $k = 2$
- (2) $k = -1$
- (3) $-1 < k < 2$

3. 水平な地面に一本の塔が垂直に建っている（太さは無視する）。塔の先端を P とし、足元の地点を H とする。また、H を通らない一本の道が一直線に延びている（幅は無視する）。道の途中に 3 地点 A, B, C がこの順にあり、 $BC = 2AB$ をみたしている。以下の問に答えよ。

- (1) $2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) A, B, C からを見上げた角度, $\angle PAH, \angle PBH, \angle PCH$ はそれぞれ、 $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ であった。AB = 100m のとき、塔の高さ PH (m) の整数部分を求めよ。
- (3) (2)において、H と道との距離 (m) の整数部分を求めよ。