2022 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１． 数列$\{a_n\}$を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)によって定める。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を $b_n = \log a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)によって定める。b_n の値を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

２． m を 3 以上の自然数, $\theta = \dfrac{2\pi}{m}$, C_1 を半径 1 の円とする。円 C_1 に内接する（すべての頂点が C_1 上にある）正 m 角形を P_1 とし、P_1 に内接する（P_1 のすべての辺と接する）円を C_2 とする。同様に、n を自然数とするとき、円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし、P_n に内接する円を C_{n+1} とする。C_n の半径を r_n , C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし、 $f(m) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ とする。以下の問いに答えよ。

(4) r_n , s_n の値を θ, n を用いて表せ。

(5) $f(m)$の値を θ を用いて表せ。

(6) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f(m)$ を求めよ。ただし、必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を用いてよい。

３． a を実数, $0 < a < 1$ とし、$f(x) = \log(1 + x^2) - ax^2$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$の極値を求めよ。

(2) $f(1) = 0$ とする。曲線 $y = f(x)$と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

４．a を正の実数とし、双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P , Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を R(s , t)とする。以下の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) s , t の値を a を用いて表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) t の値を s を用いて表せ。

５．a , b を実数, p を素数とし、$1<a<b$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) x , y , z を 0 でない実数とする。$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2) m , n を $m>n$ をみたす自然数とし、$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする。m , n の値を p を用いて表せ。

(3) m , n を自然数とし、$a^m=b^n=(ab)^p$ とする。b の値を a , p を用いて表せ。

◆文系

１．a を正の実数とする。$x\geqq 0$ のとき $f(x)=x^2$, $x<0$ のとき $f(x)=-x^2$,とし、曲線 $y=f(x)$を C , 直線 $y=2ax-1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の共有点の個数を求めよ。

(2) C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつとする。C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

２．a を正の実数とし、円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x-2\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P , Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を R(s , t)とする。以下の問いに答えよ。

(5) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(6) s , t の値を a を用いて表せ。

(7) a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(8) t の値を s を用いて表せ。

３．理系５と同じ