

1964 年

大阪大学 数学入試問題

1. (文・理) 四辺形ABCDの辺AD上に2点E, Fをとり $AE = EF = FD = \frac{1}{3}AD$, また、辺BC上に2点G, Hをとり、 $BG = GH = HC = \frac{1}{3}BC$ とする。線分AB, EG, FH, DCの中点をそれぞれM, P, Q, Nとすれば、4点M, P, Q, Nは同一直線上にあることを証明せよ。

2. (文・理) 3つの動点A, B, Cが1つの円周上の同じ点を同時に出発し、円周上を同じ向きにそれぞれ一定の速さで動くとする。AはBを次第にひきはなし、さらに、Bの後方に近づき、出発してから a 秒後にAがはじめてBを追いぬく。同様に、出発してから b 秒後にBがはじめてCを追いぬく。この場合、出発してから何秒後にAがはじめてCを追いぬくか。

3. (文) 3つの二次方程式

$$x^2 - 6x + ab = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$x^2 - (a+4)x + 2b = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$x^2 + 2x + 8a + 5 = 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

において、①が異なる2実数解をもち、その大きい方の解が②を満足し、小さい方の解が③を満足するように、実数 a, b の値を定めよ。

4. (理) x がどんな実数値をとっても、不等式

$$\frac{x^2 \cos \theta + x(\cos \theta + 2) + \cos \theta}{x^2 + x + 1} > \sin \theta - 2$$

が成り立つための θ の値の範囲を求めよ。

5. (文・理) 2つの放物線 $y = x^2 + ax + 1, y = 2x^2 + x + a$ が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を定めよ。また、この範囲で a の値が変化するとき、その2つの交点を結ぶ線分の中点がえがく図形を求めよ。

6. (理) 曲線 $y = x^3$ の接線で、点 $P(1, a)$ を通るものの個数は、 a の値によってどのように変わるか。

7. (理) $x \neq 0$ のとき、次の無限級数の和 $S(x)$ を求めよ。

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots$$

次に $x \neq 0$ のとき $f(x) = S(x)$, $x = 0$ のとき $f(x) = 1$ として関数 $f(x)$ を定義するとき、 $y = f(x)$ のグラフと点 $P(1, 3)$ を通る直線 g とで囲まれる部分の面積 A が最小となるように g の傾きを定めよ。また、 A の最小値はいくらか。