

1967年

# 大阪大学 数学入試問題

1. (理) 2次方程式  $x^2 + px + q = 0$  が相異なる2実数解  $\alpha, \beta$  をもち、かつ、数列  $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3, \dots, \alpha^n + \beta^n, \dots$  が収束するとき、点  $(p, q)$  の存在範囲を図示せよ。
2. (文・理) 直線  $y = x$  と放物線  $y = 2^{-100}x^2$  とによって囲まれる図形をFとする。座標が  $(2^m, 2^n)$  であるような点はFの内部に何個あるか。ただし、 $m, n$  は正の整数とする。
3. (文・理)  $x$  の3次式  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  と2次式  $g(x) = x^2 + px + q$  において、関数  $y = f(x)$  が極値をもたず、 $y = f(x)$  のグラフと  $y = g(x)$  のグラフとがただ1点  $A(0, 1)$  を共有し、 $A$  において共通の接線をもつとする。
- (1)  $p$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 放物線  $y = g(x)$  の頂点はどのような図形をえがくか。
4. (文・理)  $\triangle ABC$  を底面、 $V$  を頂点とする3角すいにおいて、 $V$  から底面におろした垂線の足  $H$  が  $\triangle ABC$  の内心に一致しているとする。
- (1)  $V$  から辺  $AB, BC, CA$  におろした垂線の足をそれぞれ  $D, E, F$  とするとき、 $VD = VE = VF$  を示せ。
- (2) さらに  $\angle AVB = 105^\circ, \angle BVC = 75^\circ, \angle CVA = 90^\circ$  であるとき、 $VA : VB : VC$  を求めよ。
5. (文) 2つの放物線  $y = x^2 + 3x, y = ax^2$  で囲まれる図形の面積を  $S$  とするとき、 $2 \leq S \leq 8$  となるような  $a$  の範囲を求めよ。
6. (理) 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  と、 $x$  軸に平行な直線  $l$  との交点を  $P, Q$  とする。 $P, Q$  における双曲線の接線と  $l$  とが囲む3角形の面積の最小値を求めよ。
7. (理) (1)  $n$  を正の整数とするとき、 $S(n) = \int_0^n e^{ax} \sin \pi x \, dx$  を求めよ。
- (2) 次に、数列  $S(1), S(2), S(3), \dots, S(n), \dots$  が収束するような  $a$  の範囲およびそのときの  $S(n)$  の極限値を求めよ。