1968 年　大阪大学　数学入試問題

１．（文・理）nを固定された自然数とする。$1, 2, 3, \cdots, 2n$の中から、奇数を全部とり出して任意の順に並べたものを$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，偶数を全部とり出して任意の順に並べたものを$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$とし、和$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$をつくる。並べ方をいろいろ変えるとき、この和の最大値と最小値を求めよ。

２．（文・理）合同な4つの3角形を用いて，これらを4つの面とする4面体（3角すい）を作りたい。3角形の3辺をa, b, c（$a \geqq b \geqq c$）とするとき，4面体を作ることができるための必要十分条件を求めよ。

３．（理）だ円$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$）がある。点$(a, 0)$を通り、$x$軸上に中心をもつ円が、このだ円と点$(a, 0)$以外に異なる2つの交点をもちながら変わるとき、このような円の周上にある点の存在する範囲を求め、これを図示せよ。

４．（理）2つの放物線 $y^2 = ax$, $y = bx^2$（ $a > 0, b > 0$ ）が囲む図形の面積が$\dfrac{1}{3}$であるとする。

(1) a, bの関係を求めよ.

(2) この2つの放物線の原点O以外の交点をPとする。それぞれの放物線のPにおける接線のなす角をOPが2等分するように、a, bの値を定めよ。

５．（文・理）不等式$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x^{2n} + y^{2n})^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 1$を満足するような$x, y$を座標とする点（$x, y$）の存在する範囲を求め、これを図示せよ。また、この図形の面積を求めよ。

６．（文）すべての実数xに対し$f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x \{f'(t) - g(t)\}\,dt$　, $g(x) = x^2 + x - \displaystyle\int_0^1 \{f(t) + g'(t)\}\,dt$ を満足するような関数 $f(x), g(x)$を求めよ．ただし、$f'(t), g'(t)$ はそれぞれ $f(t), g(t)$ の導関数を表わす.

7．（理）αを$0<\alpha<1$なる定数とする。

(1) $0<x\leqq 1$なるxに対し、$\dfrac{1}{x}$の小数部分を$f(x)$で表わす。正の整数nを定めるとき、$\dfrac{1}{n+1}<x\leqq 1$および$0\leqq f(x)\leqq \alpha$を同時に満足するxの範囲は、互いに共通部分をもたないn個の閉区間の和集合である。それらの区間を求めよ。

(2) (1)で求めた区間を順にならべたものを$[\,a_n\,,\,b_n\,]\,,\,[\,a_{n-1}\,,\,b_{n-1}\,]\,,\,\cdots\,,\,[\,a_1\,,\,b_1\,]$（ただし、$a_n<b_n<a_{n-1}<b_{n-1}<,\,\cdots\,,<a_1<b_1$）とし、$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{dx}{1+x}$とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。