

1. (文・理)平面上で A_1, A_2, \dots, A_n を相異なる n 個の定点とし、 P を任意の点とする。点 A_1 に関して P と対称な点を P_1 、点 A_2 に関して P_1 と対称な点を P_2, \dots 、点 A_n に関して P_{n-1} と対称な点を P_n とする。

(1) n が偶数であるとき、点 P を P_n にうつす移動は、どのような移動か。この移動はベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ だけできまる。その理由をのべよ。

(2) n が奇数であるとき、点 P を P_n にうつす移動は、点対称であることを証明せよ。また、その対称の中心を求めよ。

2. (文)原点 O を中心とする半径 a の円のたがいに直交する半径を OM, ON とする。点 M および N から x 軸におろした垂線と、だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)との交点のうちで、 M, N と同一象限内にある点をそれぞれ P, Q とする。

(1) OM が x 軸の正の方向となす角を θ とするととき、 $OP + OQ$ を θ の関数として表わせ。

(2) $OP + OQ$ の最大値、最小値を求めよ。

3. (理)(1) 点 $P(a, b)$ が円 $x^2 + y^2 = p^2$ ($p > 0$)上を動き、点 $Q(c, d)$ が円 $x^2 + y^2 = q^2$ ($q > 0$)上を動くとき、 $2a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$ は、 P と Q とが原点から引いた同一半直線上にあるときに、最大値をとることを証明せよ。

(2) a, b, c, d が $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ を満たす実数であるとき、 $2a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$ の最大値を求めよ。

4. (文)不等式 $\{\log_4(x^2 + y^2) - \log_8(x^3 - y^3)\} \{\log_2 y - \log_4(x^2 - 2y + y^2)\} > 0$ を満たす点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ。また、その面積を求めよ。

5. (理)複素平面上で、複素数 z を表わす点を点 z とよぶことにする。点 $1 + \sqrt{3}i$ を中心とし、半径1の円を C とする。

(1) $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$)とするととき、点 z が円 C 上にあれば、点 αz はある円(C' で表わす)上にあることを示せ。

(2) 円 C と C' が外接するとき、 θ の余弦を r の関数として表わし、 r のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha \neq 1$ とするとき、円 C' が円 C の内部に含まれることがあるか。理由をつけて答えよ。

6. (文) (1) x の多項式 $f(x)$ が、定数 p, q, r, a と多項式 $P(x)$ によって

$$f(x) = p + q(x-a) + r(x-a)^2 + P(x)(x-a)^3$$

と表わされるとき、次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$p = f(a), \quad q = f'(a), \quad r = \frac{1}{2}f''(a)$$

(2) (1) において $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ とするとき、 $|p| + |q| + |r|$ が最小となるように a の値を定めよ。

7. (理) 次数が 3 より小さくない x の多項式 $f(x)$ を $x - a$ (a は定数) で割った商を $P(x)$ 、余りを p とし、 $P(x)$ を $x - a$ で割った商を $Q(x)$ 、余りを q とし、 $Q(x)$ を $x - a$ で割った商を $R(x)$ 、余りを r とする。

(1) $p = f(a)$, $q = f'(a)$, $r = \frac{1}{2}f''(a)$ を証明せよ。

(2) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ とするとき、 $|p| + |q| + |r|$ が最小となるように a の値を定めよ。

8. (理) $f(x) = \int_0^x (\sin t) \log(1 + \sin t) dt$ を $0 \leq x \leq \pi$ で定義された関数とする。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 部分積分を用いて $f(\pi)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の値の増減および $y = f(x)$ の表す曲線の凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をえがけ。

9. (理) $f(x)$ はすべての実数に対して定義され、正の値をとる連続関数で

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ とおくとき $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 1$ を満たすものとする。

(1) $F(x) = f(x) + g(x)$, $G(x) = f(x) - g(x)$ とするとき $\frac{d}{dx}F(x) = F(x)$, $\frac{d}{dx}G(x) = -G(x)$ となることを証明せよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。