

1. (文・理) 実数 $a$ を係数にふくむ2次方程式  $x^2 + 2ax - (a + 1) = 0$  の2解を  $\alpha, \beta$  とす

る。このとき、定積分  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} (x^2 + x + a) dx$  を最小にする $a$ の値を求めよ。

2. (文・理) 複素平面上に2つの複素数  $\alpha, \beta$  がある。実数  $x, y$  が  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  の範囲内の値をすべてとるとき、複素数  $x\alpha + y\beta$  のつくる図形の面積を  $S$  とする。絶対値を1に保ちながら  $\alpha, \beta$  が動くとき、面積  $S$  の最大値とそのときの  $\alpha^2 + \beta^2$  の値を求めよ。

3. (文・理) 次の文中の[ ]にあてはまる答えを、答案用紙の指定された場所に記入せよ。

空間に1つの立方体がある。その8頂点のうち相異なる4頂点  $A, B, C, D$  は次のような位置にある。 $A$  と  $B$  は同一の面上になく、線分  $CD$  は1つの辺になる。このとき、辺  $CD$  上の1点  $P$  と、2頂点  $A, B$  をふくむ平面による立方体の切り口は、一般に[ ]である。とくに点  $P$  が[ ]にあれば切り口は長方形になり、また[ ]にあれば、ひし形になる。

4. (文・理) 5つの国から集まった人たちが両手をつないで1つの輪をつくる。どの異なる2つの国をとっても、それぞれの国から来た人たちがどこかで手をつなぐようにしたい。このような輪をつくることのできる最小の人数を求めよ。

5. (理) 実数  $x_1$  を任意にとり、2次関数  $f(x) = x(2 - x)$  を用いて  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により、数列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  を定める。

(1) 一般項  $x_n$  を初項  $x_1$  で表せ。

(2) この数列が収束するような  $x_1$  の範囲を求めよ。

6. (理) 整数  $a, b$  を係数とする2次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  の2解を  $\alpha, \beta$  とする。

和  $\sum_{r=0}^n \alpha^{n-r} \beta^r$  は、すべての正の整数  $n$  について、整数値をとることを証明せよ。

7. (理) 連続関数  $f(x)$  が、負でないすべての実数  $x$  について

$x + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (x - t) f(t) dt$  を満たす。この関数  $f(x)$  を求めよ。