1971 年

大阪大学　数学入試問題

１．（文・理）k を 0 でない実数の定数とする。実数 a, b が $ab=k$ を満たしながら動くとき、2 点 $(a, 0), (0, b)$ を通るどの直線の上にもない点の存在する範囲を求め、これを図示せよ。

２．（文・理）a を実数とし、$z=\cos 2a\pi + i\sin 2a\pi$ とおく（ただし、$i=\sqrt{-1}$ ）。

⑴ a が有理数であるとき、複素数 $z, z^2, \cdots, z^n, \cdots$ のうちで相異なるものはいくつあるか。

⑵ a が無理数のとき、$z, z^2, \cdots, z^n, \cdots$ はすべて相異なることを示せ。

３．（文・理）3 点 A$(0, a)$, B$(b, 0)$, B’$(-b, 0)$（ a, b は正の実数 ）を通り、y 軸を軸とする放物線がある。点 B , B’ におけるこの放物線の接線に平行に原点を通る 2 直線を引く。これらの直線のおのおのと放物線とが囲む 2 つの図形の共通部分の面積を求めよ。

４．（文・理）(1) 1 円、5 円、10 円の硬貨をとり混ぜて合計 $10n$ 円にする仕方は $(n+1)^2$ 通りあることを証明せよ。ただし、n は正の整数とする。

(2) さらに 50 円の硬貨を加えて、これら 4 種類の硬貨をとり混ぜて合計 1000 円にするしかたはいく通りあるか。

５．（理）曲線 $y=\cos x-1$ の上の 1 点を P とする。x 軸上に点 Q を、y 軸に関して P と同じ側にあり，かつ原点 O からの距離が線分 OP の長さに等しくなるようにとり、直線 PQ と y 軸との交点を R とする。点 P が曲線上を動いて原点 O に近づくとき、Rはどんな点に近づくか。

６．（理）正の実数 α, β が $\alpha+\beta=1$ を満たすとする。

⑴ $\dfrac{1}{\alpha\beta}$ がとる値の範囲を求めよ。

⑵ c を定数とするとき、$\left(c+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(c+\dfrac{1}{\beta^2}\right)$ の最大値または最小値を求めよ。

7.（理）(1) 曲線 $C: y=x+\dfrac{1}{x}$ （$x>0$）の上の 2 点 $A\left(\alpha, \alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right), B\left(\beta, \beta+\dfrac{1}{\beta}\right)$（ $\alpha<\beta$ ）における曲線の 2 接線の交点を $P(a, b)$ とするとき、α, β を 2 解とする 2 次方程式を a, b を用いて表せ。

(2) 1 点から曲線 C に 2 本の異なる接線が引けるとき、その点はどんな範囲にあるか。この範囲を図示せよ。

(3) 上の(1)において、$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が一定のとき、PA , PB と曲線 C とで囲まれた部分の面積 S も一定であることを示せ。また、$\dfrac{\beta}{\alpha}=3$ のとき S はどんな値になるか。