1972年

大阪大学　数学入試問題

１．（文・理）曲線 $y=x(x-1)^2$ と直線 $y=k$ とが相異なる3点で交わり、しかも、それらの交点のx座標が等比数列をなすように実数kを定めよ。

２．（文・理）2つの放物線 $y=ax^2+b$， $y=-cx^2+d$（ ただし、$a>0, c>0, b>d$ とする ）の頂点をそれぞれP , Qとする。これらの放物線の共通接線がy軸と交わる点をRとするとき、線分PRと線分QRの長さの比を求めよ。

３．（文・理）xに関する2次方程式 $x^2-4x\sin\theta+2\tan\theta=0$（ただし、$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする）がある。複素平面において、上の方程式の2解を表す点をP , Qとし、原点をOとするとき

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積をθを用いて表せ。

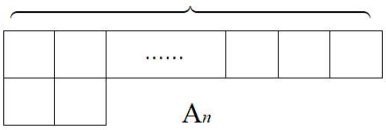
(2) 3角形OPQが直角3角形になるようにθの値を定めよ。

４．（文・理）n個（ $n\geqq4$ ）の正方形をそれぞれ次のようにならべた図形A_n , B_nがある。A_n , B_nのそれぞれにおいて1からnまでの数をもれなく1つずつ各正方形に入れて、次の2つの条件を満足するようにする。

(i) 同一の行（横の並び）のどの2つの数をとっても右の数が左の数より大きい。

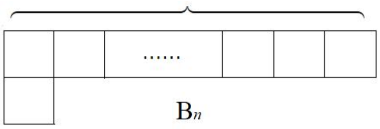
(ii) 同一の列（縦の並び）の2つの数は下の数が上の数より大きい。

$n-2$個



A_n

$n-1$個



B_n

このような入れ方がA_nについては$f(n)$通り、B_nについては$g(n)$通りあるとする。

(1) $n\geqq5$のとき，A_nにおいて数nを入れることができる正方形の選び方は何通りあるか。

(2) $n\geqq5$のとき、$f(n)=f(n-1)+g(n-1)$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(n)$および$g(n)$をnを用いて表せ.

５．（理）数列$\{a_n\}$において $\begin{cases}(\sin\theta)a_{n-1}-(\theta+\sin\theta)a_n+\theta a_{n+1}=0 & (n\geqq 1)\\ (\sin\theta)a_0-\theta a_1=0\end{cases}$ という関係がある。ただし、$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) 一般項a_nをa_0とθを用いて表し、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が収束することを示せ。

(2) 条件$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=1$ を満たしながらa_0とθが動くとき、おのおののn（$n\geqq 1$）についてa_nの最大値を求めよ。

６.（理）関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1-|x-1|)$ のグラフが、直線 $x=a$ を軸とする放物線 $y=g(x)$ と2つの点で接するという。

(1) 関数$g(x)$を求めよ。

(2) $g(x)$のグラフがx軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(3) $f(x)$のグラフと$g(x)$のグラフとによって囲まれた図形の面積を求めよ。

７．（理）次の条件を満たす点Pの範囲を図示せよ。

条件：放物線 $y=x^2+4x$ 上に直線OPに関して対称な相異なる2点が存在する。ただし、Oは原点である。