1973 年

大阪大学　数学入試問題

1．（文・理）3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$（ただし、a , b , cは実数で、$c<0$とする ）の3解が、すべて絶対値1の複素数であるための必要十分条件は、次の形で表されるという。□にあてはまる数または式は何か。またその理由を述べよ。

$\square \leqq a \leqq \square$ ， $b=\square$ ， $c=\square$

2．（文・理）座標平面上に3点A$(a\ ,b)$, B$(0\ ,0)$, C$(c\ ,0)$（ $abc\neq 0$ ）がある。いま、$\mathrm{M_1}$はACの中点、$\mathrm{A_1}$は半直線$\mathrm{BM_1}$上で、$\mathrm{BM_1}:\mathrm{BA_1}=2:3$を満たす点、$\mathrm{M_2}$は$\mathrm{A_1C}$の中点、$\mathrm{A_2}$は半直線$\mathrm{BM_2}$上で、$\mathrm{BM_2}:\mathrm{BA_2}=2:3$を満たす点とし、以下同様に$\mathrm{M_3}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{M_4}$, $\mathrm{A_4}$, … をとり、点列$\{\mathrm{M}_n\}$, $\{\mathrm{A}_n\}$を定める。

(1) 点列$\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, … は1つの直線上にあることを示し、この直線の方程式を求めよ。

(2) 折れ線$\mathrm{BAM_1A_1M_2\cdots M_nA_nC}$と$x$軸によって囲まれた図形の面積を$\mathrm{S}_n$とするとき、$\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。

3．（文・理）$f(x)=x^3+6ax^2-12x+1$とする（ aは実数 ）。

(1) 関数$y=f(x)$は、極大値および極小値をそれぞれ1つずつもつ。その理由を述べよ。

(2) 関数$y=f(x)$のグラフ上で、極大、極小を与える点を結ぶ線分の3等分点をP , Qとする。線分PQ（両端を含む）がy軸と交わるようなaの値の範囲を求めよ。

4．（文・理）次の等式$1-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{y-\cfrac{1}{z}}}=\dfrac{2}{7}$を満足する整数$x$, y , zの組$(x\ ,y\ ,z)$を、すべて求めよ。ただし、これらの組$(x\ ,y\ ,z)$において、$|y|\geqq 2$, $|z|\geqq 2$であることは、わかっている。

5．（理）$x>0$で定義され、正の値をとる関数$y=f(x)$がある。この関数のグラフCは$\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$を通り、かつC上の各点 $(x\ ,f(x))$ における接線がx軸と交わる点のx座標は$x+\dfrac{1}{x}$であるとする。

(1) $f(x)$を求めよ。

⑵ 点(k , 0)から曲線Cに何本の接線が引けるか。

６．（理）袋の中に($2n-3$)個（ $n \geqq 2$ ）の白球と3個の赤球が入っている。
⑴ この袋から1球ずつk回（ $k \geqq 3$ ）取り出すとき、取り出されたk個の中に赤球が3個とも含まれている確率p_kを求めよ。
⑵ A , B2人がAからはじめて1球ずつ交互に取り出し、3個目の赤球を取り出したほうを勝ちとするとき、
（イ）ちょうどk回目に勝負のきまる確率q_kを求めよ。
（ロ）A , Bそれぞれの勝つ確率を求めよ。
（⑴，⑵ それぞれにおいて、取り出した球はもとに戻さない。）

７．（理）⑴ $\sin A \sin C = \sin B \sin D$ のとき、四角形ABCDは台形であることを証明せよ。
⑵ 台形ABCDにおいて、辺BC , 辺DAの長さをそれぞれ$x$cm、$y$cm、直線ABと直線CDの交点から辺BCに下ろした垂線の長さを$z$cmとする。
$\sqrt{x}-\sqrt{y}=2$, $x=\dfrac{z+1}{2}$, $y=\dfrac{15-z}{2}$ であるとき、台形ABCDの面積を求めよ。