1974 年

大阪大学　数学入試問題

1. (文･理)正の整数nに対し，不等式$y < |x|^n$を満たす平面上の(x, y)の集合をE_nとする。

(1) E_1, E_2, E_3の交わり（共通部分）を求めよ。

(2) すべてのE_n（$n = 1, 2, \ldots$）に共有される点(x, y)全体の集合を図示せよ。

2. (理)a, bは実数で$a^2 + b^2 > 0$とする。変数θが連立不等式

$a\sin\theta + b\cos\theta \geqq 0$, $a\cos\theta - b\sin\theta \geqq 0$を満たす範囲にあるとき，$\sin\theta$の最大値を求めよ。

3. (文･理)点Pは正方形ABCDの頂点Aから正方形の内部に向かって出発し，次の3つの規則に従って動くものとする。

1. Pが正方形の内部にあるときは直進する。
2. Pが正方形の辺上に達したのちのPの進み方は，その辺を鏡とみなして光の反射の法則に従う。
3. Pが正方形の頂点に達したときはそこで止まる。

点PがAから出発するときの方向が辺ABとなす角をθとして，次の問に答えよ。

(1) $\tan\theta = 0.3$のとき，点Pはどの頂点に止まるか。

(2) Pが頂点B, C, Dのそれぞれに止まるために，$\tan\theta$の値が満たすべき条件はそれぞれ何か。

(3) Pが頂点Aに止まることがあるか。理由をつけて答えよ。

4. (文) nを正の整数とする。

(1) 次の式を簡単にせよ。

$$\sin x\{\cos x + \cos 3x + \cdots\cdots + \cos(2n-1)x\}$$

(2) 次の式を証明せよ。

$$\cos x + \cos 3x + \cdots\cdots + \cos(2^{n+1}-3)x + \cos(2^{n+1}-1)x$$
$$= \quad 2^n \cos x \cdot \cos 2x \cdots\cdots \cos 2^{n-1}x \cdot \cos 2^n x$$

5. (文)xの4次関数 $f(x) = x^4 - 6a^2x^2 + bx$ が極大値をもつとき，実数a, bを座標とする点(a, b)は平面上のどんな範囲にあるか。

6. (理)ある区間で定義され第2次導関数をもつ関数$f(x)$が与えられたとき，この区間内の 2点a, b ($a<b$) に対し $S=\frac{b-a}{2}\{f'(a)+f'(b)\}-\{f(b)-f(a)\}$ とおく。

(1) $f''(x)$がつねに負であるとき，曲線$y=f(x)$の 2点(a, $f(a)$), (b, $f(b)$)における接線の交点のx座標をcとする。cと $\frac{a+b}{2}$ との大小はSの符号とどんな関係にあるか。

(2) $f(x)=\log x$のとき，Sの符号を調べよ。ただし，対数は自然対数とする。

7. (理)曲線$y=f(x)$（$x>0$）上の任意の点Pにおける接線は曲線 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）と 2点(Q, Rとする）で交わり，しかもPは線分QRの中点であるという。

(1) $f(x)$は一般にどんな関数か。

(2) このような関数$f(x)$を1つ定めたとき，線分QRと曲線 $y=\frac{1}{x}$ とによって囲まれる図形の面積は点Pに無関係である。このことを証明せよ。