1975年

大阪大学　数学入試問題

1.（文･理）$a>1$のとき、2次方程式 $ax^2-2x+a=0$ の2解を表す複素平面上の点をA , Bとし、2次方程式 $x^2-2ax+1=0$ の2解を表す複素平面上の点をC , Dとする。

(1)（理）$a>1$を満たしながら、a が変化するとき、点A , Bはどんな図形を描くか。

(2) 4点A , B , C , Dは同一の円周上にあることを証明せよ。

2.（文）次の不等式を満たすx の範囲を求めよ。

$$\log_2(1-x)+\log_4(x+4)\leqq 2$$

3.（理）方程式$\sin^3\theta+\sin^2\theta-\sin\theta+c=0$において、実数 c が変化するとき、この方程式を満たすθの個数はどのように変わるか。ただし、$0\leqq\theta\leqq\pi$とする。

4.（文）3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解が、連続した3整数であるとき、曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ と，その極小点（yが極小値をとる曲線上の点）における接線とで囲まれる図形の面積を求めよ.

5.（理）曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が x 軸に接し、また，この曲線と直線 $y=d$ との交点の x 座標が連続した3整数である。このとき、この曲線と x 軸とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

6.（文）座標平面上に、2点P$(\cos 2t+\sin 2t,\ \cos 2t-\sin 2t)$, Q$(\sqrt{3}\cos t-\sin t,\ \cos t+\sqrt{3}\sin t)$がある。$t$ が 0 から π まで変化するとき、

(1) 点P の軌跡および点Qの軌跡を図示せよ。

(2) 2点P , Q間の距離が$\sqrt{2}$になるような t の値を求めよ。

7.（理）関数$f(x)$の導関数$f'(x)$が区間$a\leqq x\leqq b$において連続であるとする。$a\leqq t\leqq b$ を満たすtに対して、曲線 $y=f(x)$ 上の点 P$(t,\ f(t))$ における接線と、直線 $x=t+1$ との交点をQとする。Mを座標平面上の定点とするとき、2つのベクトル$\overrightarrow{MP}$と$\overrightarrow{PQ}$の内積$(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PQ})$は$t$の関数となる。2点 A$(a,\ f(a))$, B$(b,\ f(b))$ に対して、$|\overrightarrow{AB}|=1$のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_a^b(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PQ})dt-(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}$$

8. (理)A , B 2人が交互に2個のさいころをふり、次の規則でゲームを行う。

1. Aの順番のとき、さいころの目の和が9であればAの勝ち、そうでなければゲームを続ける。

2. Bの順番のとき、2つのさいころの目が同じであればBの勝ち、そうでなければゲームを続ける。

Aからさいころをふりはじめ、奇数回目にA、偶数回目にBがさいころをふるとき

(1) A , Bがそれぞれ2回ずつふっても、また勝負がきまらない確率を求めよ。

(2) $(2n-1)$回目にAが勝つ確率p_nおよび$2n$回目にBが勝つ確率q_nを求めよ。

(3) Aが勝つ確率を$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$、Bが勝つ確率を$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$と考え、それぞれの値を求めよ。