1976 年	# 大阪大学　数学入試問題	

1. ∠Bが鋭角である△ABCにおいて、頂点Aから辺BCまたはその延長上に垂線を引き交点をHとし、また、頂点CからABまたはその延長上に垂線を引き交点をKとする。$\frac{2\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}$, $\frac{2\mathrm{BK}}{\mathrm{BA}}$がともに整数であるとき、

(1)（文）$\cos\mathrm{B}$の値は$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$のいずれかでなければならないことを示せ。

(2)（文）上にあげた$\cos\mathrm{B}$の各々の値に対して、条件を満たす3角形があれば、その例を1つずつあげよ。

(3)（理）△ABCはどのような3角形であるか。

2.（文）$n=1,2,\cdots$ に対し、2 乗してちょうど n けたの数となる正の整数全体の個数を $f(n)$とする。このとき $f(n+1)>f(n)$ であることを証明せよ。

3.（理）1辺の長さ1の立方体において、1つの頂点をA , Aから最も遠い位置にある頂点をBとする。この立方体の中に2つの球S_1 , S_2を、S_1は頂点Aを通る立方体の3つの面に接し、S_2は頂点Bを通る立方体の3つの面に接し、かつS_1とS_2は互いに接するように入れる。S_1とS_2の体積の和が最小になるのはS_1 , S_2の半径がいくらのときか。

4.（文）y軸を軸とする放物線Cと直線$y=ax\ (a>0)$が点Pにおいて接している。Pを通り直線$y=ax$に垂直な直線とy軸との交点をQ ，放物線Cの頂点をRとするとき， $\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}$を求めよ。ただし、Oは原点とする。

5.（理）点$\mathrm{P}(x,y)\ (x>0)$は、曲線 $y=x^3$ 上の点とする。Pを通るこの曲線の2本の接線が x 軸と交わる点をA , Bとし、$\angle\mathrm{APB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とおく。

(1) $\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(2) $\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ。

6. 曲線 $y=\sin x$ の $0\leqq x\leqq\pi$ の部分がx軸との間に囲む図形をx軸のまわりに回転させてできる立体を考える。この立体をx軸に垂直な$2n-1$個の平面によって$2n$個の部分に分割し、分割されたおのおのの部分の体積が等しいようにする。これらの平面がx軸と交わる点のx座標のうち、$\frac{\pi}{2}$より小さくて$\frac{\pi}{2}$に一番近いものをa_nとするとき、

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)$を求めよ。

7. 4けたの自然数Aの平方根を求めるために次の手順がある。

(i) 下から2けた目と3けた目の間に仕切りを入れ、上2けた、下2けたの表す数をそれぞれa，bとする（$10 \leqq a < 100$，$0 \leqq b < 100$）。

(ii) αは$a \geqq \alpha^2$であるような最大の整数とする。

(iii) $c = a - \alpha^2$，$d = c \times 100 + b$とする。

(iv) βは$d \geqq (\alpha \times 20 + \beta) \times \beta$であるような最大の整数とする。.

(v) $B = \alpha \times 10 + \beta$，$e = d - (\alpha \times 20 + \beta) \times \beta$とする。

この手順による計算に対し、次のことを証明せよ。

(1) $\beta \leqq 9$

(2) $(\beta + 1)^2 > A \geqq B^2$

(3) Aがある自然数の2乗であるための必要十分条件は$e = 0$である。