1977 年	大阪大学　数学入試問題	

1.（文理）実数を係数とする2つの整式$f(x)$, $g(x)$ がある。いまある実数a に対し、$\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3$が$(x-a)^2$で割り切れ、$(x-a)^3$では割り切れないとすれば、$f(x)-g(x)$が $(x-a)^2$で割り切れることを証明せよ。

2.（理）点$\mathrm{P}(\alpha,\beta)$は曲線C：$xy=k^2\ (x>0)$上にあり、点$\mathrm{A}(2,2)$から曲線C上の点までの距離が最小となる点とする。このとき、kとαはどのような関係にあるか．また、kが動くとき、点(k,α)はどのような図形上にあるか。

3.（理）同じ大きさの正4面体を18個入れた箱があり、その中の各4面体のそれぞれの面には1から9までの9個の数字のうちのどれか1つが書いてある。どの4面体についても、その4面の数字は互いに異なっており、また，1から9までのどの2つの数字の組に対しても、その両方の数字を同時に含む4面体の個数は一定となっている。

(1) 数字1と2を同時に含む4面体の個数はいくつか。

(2) 箱の中をよくかきまぜて1個の4面体を取り出すとき、それが数字kを含む確率をP_kとする。すべてのP_k（ $k=1,2,\cdots,9$ ）が等しいことを証明せよ。

4.（文理）半径r_nの円S_n（ $n=1,2,\cdots$）があり、各nに対して、円S_nに内接する正2^{n+2}角形の1つおいて隣り合う2辺の延長の交点を頂点とする正2^{n+2}角形は円S_{n+1}に内接している。次の問に答えよ。

(1) $r_{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=r_n\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$を示せ。

(2)（文）$r_1=1$のとき、$r_n<\sqrt{2}$ $(n=1,2,\cdots)$を示せ。

(3)（理）$r_1=1$のとき、$\lim_{n\to\infty}r_n$を求めよ。

5.（理）関数$f(x)$は$x=0$で第2次導関数$f''(x)$をもち、$x>0$で$f'(x)>0$, $f''(x)>0$を満たすものとする。曲線C：$y=f(x)\ (x\geqq 0)$上の点Pにおける接線とy軸との交点をQとし、Qを通りx軸に平行な直線にPから垂線を引き交点をRとする。PがC上を動くときRの描く曲線をC_0：$y=g(x)$として、次の問に答えよ。

(1) $g(x)$をx, $f(x)$, $f'(x)$を用いて表せ。

(2) 2曲線C, C_0と直線PRで囲まれる部分の面積をS_1とし、曲線C ,直線PQおよびy軸で囲まれる部分の面積をS_2とする。いま、PがC上を動くときつねに$\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2$であり、Cは2点$(1,0)$, $(2,7)$を通るという。$x\geqq 0$に対し関数$f(x)$を定めよ。

6.（文）空間に座標軸をとり、原点を O とする。O を 1 頂点とする正 4 面体 OABC があり、3 頂点 A，B，C は、xy 平面上の放物線 $y=kx^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面上にある。この正 4 面体の 1 辺の長さ l を k で表せ。ただし、$k>0$ とする。

7.（文）放物線 $y=x^2-2x-2$ を C とする。放物線 $y=2x^2$ 上の点$(a, 2a^2)$における接線を l とするとき

(1) l と C はつねに 2 点で交わることを示せ。

(2) l と C で囲まれる部分の面積 $S(a)$の最小値を求めよ。