

1979 年

大阪大学 数学入試問題

1. (文・理) $\triangle ABC$ を角 A が 60° である鋭角 3 角形とする。 $\triangle ABC$ の内部にあって $PA \leq PB$, $PA \leq PC$ を同時に満たす点 P の全体がつくる領域を G とする。 $\triangle ABC$ の面積が領域 G の面積の 3 倍であるとき、 $\triangle ABC$ はどのような 3 角形か。

2. (文・理) 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ

$$a_n = 2^n, b_n = 3n + 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。 $\{a_n\}$ の項のうち $\{b_n\}$ の項でもあるものを小さいものから順に並べて得られる数列を $\{c_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。

(1) $\{c_n\}$ の初項から第 5 項までを書け。

(2) $\{c_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

3. (理) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が定める 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって点 $P(x, y)$ が点 $P'(x', y')$ にくつとき、 P の位置にかかわらず、等式 $x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2$ が成立するものとする。この A が $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすために必要で十分な条件は $b + c = 0$ であることを証明せよ。

4. (理) $f(x) = x \sin x$ とおく。 n を自然数とし、 I_n は区間 $[n\pi, (n+1)\pi]$ を表すとする。

(1) 区間 I_n において $|f(x)|$ を最大にする x の値を $n\pi + a_n$ ($0 \leq a_n \leq \pi$) とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ を証明せよ。

(2) x が区間 I_n を動くときの関数 $y = f(x)$ のグラフを C_n とし、 C_n と x 軸が囲む図形の面積を S_n 、 x 軸上の区間 I_n を 1 辺として C_n を含む最小の長方形の面積を T_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n}$ を求めよ。

5. (理) 1 から n までの整数のどれか 1 つをカードに書いて、数 1 を書いたカードを 1 枚、 2 を書いたカードを 2 枚、以下同様に n を書いたカードを n 枚作り、これらを箱の中に入れる。箱の中をよくまぜてから 1 枚のカードを取り出し、それに書いてある数を X とする。(このとき X は確率変数と考えられる。)

(1) k を n 以下の正の整数とすると、 $X = k$ となる確率を n と k を用いて表せ。

(2) X の期待値 (平均値、または平均ともいう) を n を用いて表せ。

(3) $n \geq 2$ とする。さらにもう 1 枚のカードを取り出し、それに書いてある数を Y とする。 X と Y の少なくとも一方が n である確率を求めよ。

6. (文・理) 2つの曲線 $\begin{cases} y = ax^3 - 2x \dots\dots \textcircled{1} \\ y = bx^3 + x + 2 \dots \textcircled{2} \end{cases}$ がある1点を通り、その点における接線は同一の直線 l

である。ただし $b > 0$ とする。曲線①と直線 l が囲む図形の面積は、曲線②と l が囲む図形の2倍に等しい。このとき a と b の値を求めよ。