

1980 年

大阪大学 数学入試問題

1. (文・理) 空間に相異なる 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(c, c, c)$ がある。ただし、 a, b は正の数とする。4 点 O, A, B, C への距離がいずれも相等しい点 $P(x, y, z)$ が xy 平面に関して C と同じ側 (xy 平面上は除く) にあるのは、 a, b, c にどのような関係があるときか。
2. (文・理) 整数 a, b を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。 $f(\alpha) = 0$ となるような有理数 α が存在するとき、以下のことを証明せよ。
- (1) α は整数である。
- (2) 任意の整数 l と任意の自然数 n に対して、 n 個の整数 $f(l), f(l+1), \dots, f(l+n-1)$ のうち少なくとも 1 つは n で割り切れる。
3. (理) $b > 0, c > 0$ とし、数列 $\{a_n\}$ は a_1 から順次 $a_n = ba_{n-1} + (-c)^{n-1} (n \geq 2)$ によって定められるものとする。 $a_1 = 1$ のとき、すべての n について $a_n = 0$ となるために b, c が満足すべき必要十分条件は $b \geq c$ であることを証明せよ。
4. (理) 2 つの袋があつて、そのどちらにも、赤玉 1 つ白玉 1 つの計 2 個ずつの玉が入っている。両方の袋からでたらめに (無作為に) 玉を 1 つずつ取り出して入れ替える。この操作を n 回引き続いて行ったとき、はじめのように各袋に赤玉と白玉が 1 つずつ入っている確率を p_n とする。
- (1) $n \geq 2$ として、 p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ。
- (2) p_n を求め、さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。
5. (理) 次の条件を満たす関数 $f(x) (x > 0)$ を求めよ。
曲線 $C: y = f(x) (x > 0)$ 上の任意の点 P における接線と x 軸との交点を Q とすると、線分 PQ は y 軸によって 2 等分される。また、点 $(0, 3)$ と C 上の点との距離の最小値は $\sqrt{2}$ である。
6. (文・理) 2 曲線 $y = x^3 - a^2x, y = -x^2 + a^2 (a > 0)$ で囲まれている部分全体の面積を、 a を用いて表せ。