

1982 年

## 大阪大学 数学入試問題

1. (文・理) 関数  $f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x - 2\sin 2x + \sin x$  の区間  $[0, \pi]$  における最大値および最小値を求めよ。

2. (文・理) (1)  $r$  を 1 でない実数とする。そのとき、 $\sum_{k=1}^n kr^k$  を  $n$  と  $r$  の式で表せ。

(2) 条件  $1 < x < 2^{n+1}$  および  $0 < y \leq \log_2 x$  を満たす整数  $x, y$  を座標とする点  $(x, y)$  の個数を求めよ。ただし、“条件  $1 < x < 2^{n+1}$ ”の  $n$  は正の整数である。

3. (理)  $yz$  平面に ( $z$  軸に) 接する球の  $xy$  平面による切り口が、3 点  $O(0, 0, 0), A(1, \sqrt{3}, 0), B(4, 0, 0)$  を頂点とする三角形の内接円である。この球の中心および半径を求めよ。

4. (理) 1 つのさいころを  $r$  回振る。第  $i$  回目に出る目の数を  $n$  とする。そのとき

(1)  $\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i\right) \neq 0$  となる確率  $P_1$  を求めよ。

(2)  $r$  回のうち、ちょうど  $k$  個の  $i$  について  $\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times n_i\right) > 0$  となる確率  $P_2$  を求めよ。

(3)  $r > 2k > 0$  のとき、 $P_2 > P_1$  が成り立つことを示せ。

5. (理) (1)  $k > 1$  のとき  $x \log x \geq (1 + \log k)(x - k) + k \log k$  が  $x \geq 1$  に対して成り立つことを示せ。

(2)  $n$  を 2 以上の整数とする。このとき  $a_n = \sum_{k=2}^n k \log k$  とおけば、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a_n < \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} x \log x \, dx < \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left\{ \log \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right\} + 1$$

ただし、対数はすべて自然対数とする。

6. (文) 放物線  $y = x^2 + 1$  上の 1 点を  $A(a, a^2 + 1)$  とする。

この放物線上に  $A$  と異なる点  $B(b, b^2 + 1)$  をとり、線分  $AB$ ,  $x$  軸および 2 直線  $x = a, x = b$  とで囲まれた台形の面積を、この放物線が 2 等分するようにしたい。そのような点  $B$  で  $b > a$  を満たすものが存在するための  $a$  の範囲を求めよ。またそのとき  $b$  を  $a$  で表せ。

7.  $z$  軸に接する球の  $xy$  平面による切り口が、3 点  $O = (0, 0, 0), A = (1, \sqrt{3}, 0), B = (4, 0, 0)$  を頂点とする三角形の内接円である。この球の中心および半径を求めよ。