

1983 年

大阪大学 数学入試問題

1. (理) 正の整数 m, n が不等式 $\sqrt{n} \leq \frac{m}{2} < \sqrt{n+1}$ を満たしているとする。次のことを証明せよ。

(1) $m^2 - 4n$ は 0 または 1 である。

(2) $m < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m + 1$

2. (理) a と b は相異なる実数として、1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 3ab-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える。

(1) この 1 次変換による直線 $2x + y = 1$ の像の直線はどのような方程式で表されるか。

(2) b がある値のとき、 a が b と異なるどのような値であっても像の直線は a の値に無関係な一定の直線になる。この b の値を求めよ。

3. (理) 1 辺の長さが 1 の正 4 面体の内部に互いに外接する 2 つの球 P, Q がある。球 P は正 4 面体の 4 面全部に接し、球 Q は正 4 面体の 3 面に接しているとする。このとき、球 P および球 Q の半径をそれぞれ求めよ。

4. (理) 曲線 $C_1: y = \sqrt{x-c}$ ($c > 0$) と曲線 $C_2: y = e^{ax}$ ($a > 0$) が 1 点 P を共有し、その点において共通の接線 l をもつとする。

(1) 点 P の座標および c を a を用いて表せ。

(2) 2 つの曲線 C_1, C_2 と x 軸, y 軸とで囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

(3) 曲線 C_1 と x 軸との交点を Q とし、直線 PQ と直線 l のなす角を θ とする。 a がどんな値のとき $\tan \theta = \frac{1}{4}$ となるか。

5. (理) つぼの中に 1 から 4 までの番号を書いた球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。つぼから無作為に 1 個を取り出してその番号を記録し、つぼに戻す試行を考える。

(1) この試行をくり返し n 回行う。こうして得られる n 個の数字のうち k 個が同じ値で、残りの $(n-k)$ 個はそれよりも小さい値である事象を A_k とする ($1 \leq k \leq n$)。 A_k の確率 $P(A_k)$ を求めよ。

(2) (1) のにおける個数 k の平均 $\sum_{k=1}^n kP(A_k)$ を E_n とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n}$ を求めよ。

6. (文) 原点のまわりの 30° の回転を表す行列を U とし、 $A = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 行列 UAU^{-1} を求めよ。

(2) 行列 A で表される 1 次変換による直線 $y = \sqrt{3}x + 1$ の像の直線はどのような方程式で表されるか。

7. (文) 座標平面上に 3 点 $A(1, 1), B(2, 2), P(-300, -600)$ がある。 $\triangle ABP$ の重心 P_1 , $\triangle ABP_1$ の重心 P_2 , …… とし、一般に $\triangle ABP_n$ の重心を P_{n+1} とする。どんな n に対して点 P_n は第 4 象限にはいるか。

8. (文) 曲線 $C: y = x^3 - x$ 上の点 $(-1, 0)$ における C の接線を l とする。曲線 C と直線 l で囲まれた図形の面積が点 $(1, 0)$ を通る直線 m で 2 等分されている。直線 m の方程式を求めよ。