

1984 年

大阪大学 数学入試問題

1. (理) 平行でない2直線 $l_1: p_1x + q_1y + 1 = 0$, $l_2: p_2x + q_2y + 1 = 0$ と、1次変換 f が与えられている。 f が l_1 を l_2 にうつし l_2 を l_1 にうつす変換であるとき、合成変換 $f \circ f$ は恒等変換であることを示せ。

2. (理) 点 $(0, 1, 3)$ を通り、球 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ と接する直線の全体を考える。

(1) 直線と球の接点の全体は1つの平面上にある。この平面の方程式を求めよ。

(2) これらの直線が xy 平面と交わる点の全体は、 xy 平面上の曲線となる。この曲線の方程式を求めよ。

3. (理) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ (頂点の番号は左回りにつける) を D で表す。 D を点 O のまわりに角 2θ 回転した図形を $D_{2\theta}$ とし、この回転によって D の頂点 A_k はそれぞれの頂点 B_k にうつるものとする。 θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{n}$ の範囲にあるとき、次の問に答えよ。

(1) 辺 A_1A_2 と辺 B_1B_n の交点を C とするとき、 $\angle A_1OC = \theta$ を証明し、 OC の長さを求めよ。

(2) D と $D_{2\theta}$ が重なる部分の面積 $S(\theta)$ と、 $S(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

4. (理) $x \neq 1$ に対して $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ とおく。 $n = 2, 3, \dots$ に対して $f_n(x) = x f_{n-1}(x) + n$ によって関数

$f_2(x), f_3(x), \dots$ を定義する。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(e^{\frac{1}{n}})}{n^2}$ を求めよ。

5. (理) n 個の玉に 1 から n まで番号をつけ箱の中に入れる。この箱から k 個の玉をでたらめに取り出し、それらの玉の最大の番号を X とする。ただし n, k は $2 \leq k \leq n$ を満たす定まった整数である。

(1) $i = 1, 2, \dots, n$ に対し、 $X = i$ である確率 P_i を求めよ。

(2) 正の整数 l, m に対し $\sum_{i=1}^m i(i+1) \cdots (i+l-1) = \frac{m(m+1) \cdots (m+l)}{l+1}$ を証明し、これを用いて X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

6. (文) 座標平面上に 3 点 $A(0, 1), B(-1, 0), C(1, 0)$ がある。 x 軸上の動点 $P(t, 0) (t > 1)$ に対して、

線分 AC 上の点 Q を $\frac{QC}{AQ} = \frac{t-1}{2t-1}$ であるようにとる。

(1) 2 点 P, Q を通る直線はすべて定点を通ることを示せ。

(2) 2 点 P, A を通る直線と線分 AB の交点を R とする。 $\triangle AQR$ の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $\frac{1}{3} < S(t) < \frac{4}{9} (t > 1)$ を証明せよ。

7. (文) 半径 1 の球が 2 つ接している。この 2 つの球のいずれにも接するように半径 $r(>0)$ の球を 8 個おき、8 個の球はすべて両隣りと接するようにしたい。このとき r の値を求めよ。

8. (文) 3 次式 $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + c$ (c は定数) について次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ が 3 個の相異なる実数解をもつためには、 c の値はどんな範囲になければならないか。

(2) $f(x) = 0$ が 3 個の相異なる整数解をもつことがあるか。また 2 個の相異なる整数を解としてもつのはどんな場合か。

9. (文) $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ として、行列 $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ を考える。 $A^6 = I$ であって、 $1 \leq n < 6$ に

対しては $A_n \neq I$ であるとき、次の問いに答えよ。ただし、 I は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表す。

(1) r および θ を求めよ。

(2) 原点を通らない 1 つの直線を l とし、行列 A_n で表される 1 次変換によって l をうつした直線を l_n とする。6 本の直線 $l_1, l_2, \dots, l_6$ の交点の個数を求めよ。