1985 年	大阪大学　数学入試問題	

1. （理）nは0以上の整数とする。

(1) $a_1 + 2a_2 = n$を満たす0以上の整数a_1 , a_2 の組の個数$X(n)$を求めよ。

(2) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = n$を満たす0以上の整数a_1 , a_2 , a_3 の組の個数を$Y(n)$で表すとき、次の等式

$Y(3n) + Y(3n+1) + Y(3n+2) = \sum_{l=0}^{3n+2} X(l)$ が成り立つことを示し、この式の右辺の値を計算せよ。

2. （理）座標平面上で、点$P(x, y)$を点$P'(x', y')$へうつす1次変換 f が $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられている。点$P_1(x_1, y_1)$が$x_1 \neq y_1$を満たすとし、$P_{n+1} = f(P_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ によってP_2 , P_3 , $\cdots$ を定め、P_nの座標を(x_n, y_n)とする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{P_1P_2}$は、点P_1の位置に無関係な、原点を通る定直線に平行であることを示せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{P_1P_n}$を$\overrightarrow{P_1P_2}$によって表せ。

(3) どのy_nも0とならないとき、数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$は収束することを示し、その極限値を求めよ。

3. （理）aを実数とするとき、関数$f(x) = a\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x - a + 1$について、次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ が$0 < x < 1$において極値をもつようなaの範囲を求め、このとき極値は$0 \leqq x \leqq 1$における$f(x)$の最小値であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が$0 < x < 1$において解をもつようなaの範囲を求め、このときの解はただ1つに限ることを示せ。

4. （文理）kを正数とし、$f(x) = x^3 - 10x^2 + kx$とする。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が3個の実数解をもち、それらの解が互いに1以上離れているためのkの条件を求めよ。

(2) 曲線$y = f(x)$がある点でx軸に接するとき、kの値および曲線$y = f(x)$とx軸とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

(3) (1) の条件を満たすkのうちで、曲線$y = f(x)$とx軸とによって囲まれる図形の面積を最小にするものを求めよ。

5. （理）1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD - EFGO を考え、A を頂点とし三角形 OFG を底面とする三角すいと、C を頂点とし三角形 OFEを 底面とする三角すいとの共通部分を V とする。

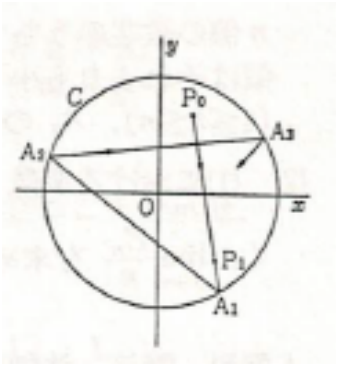
(1) 平面 $z = a$ による V の切り口の面積の最大値を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。

6. （文）平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ によって、ある直線 l が同じ直線 l にうつされるとき、2 次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ は実数解をもつことを市ケ瀬。

7. （文）xy 平面において、曲線 $y = x^2$ と正方形 $\{(x, y) : a \leqq x \leqq a+1,\ b \leqq y \leqq b+1\}$ が共通点をもつとき、点 (a, b) の存在する範囲を求め、これを図示せよ。

8. （文）xy 平面における原点 O を中心とする半径 1 の円周 C は鏡になっているものとする。C の内部に異なる 2 点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ をとる。る.右図のように点 P_0 を出て点 P_1 を通り、C 上の点 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ で反射をくり返しながら進む光を考える。ただし、この光は C の内部では一定の速さで直進し、C に当たったときは反射の法則によって入射角と反射角が等しいように反射するものとする。たとえば、図の点 A_1 においては $\angle P_0A_1O = \angle OA_1A_2$ となる。このとき、次の問に答えよ。



(1) 点 P_0, P_1 を結ぶ直線と原点 O との距離 d を、点 P_0, P_1 の座標を用いて表せ。

(2) この光がある時間後にふたたび線分上を点 P_0 から点 P_1 の向きに進んで行くための必要十分条件は、ある有理数 q が存在して $d = \cos(q\pi)$ を満たすことであることを示せ。