1991 年

大阪大学　数学入試問題

１．（理）放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える。この放物線と直線は 2 交点 P，Q をもち、P と Q の x 座標の差の絶対値は1であるという。ただし $a>0$ とする。放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする。

(1) d を a を用いて表せ。

(2) d を最大にする a と b の値を求めよ。

２．（文）直線 $y=1$ を l, 直線 $y=kx$ を l' とする。行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換 f は l 上の点を l' 上の点に移すものとする。

(1) $c=ka$, $d=kb$ が成り立つことを示せ。

(2) $A^2=(a+kb)A$ を示せ。

(3) A^2 が零行列でないとき、f による l' の像は l' であることを示せ。

３．（理）原点を通らない直線 $l: y=px+1$ と原点を通る直線 $l': y=qx$ とがある。行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される1次変換 f は l 上の点を l' 上の点に移すものとする。A^2 が零行列でないとき、f による l' の像は l' であることを示せ。

４．（文）xyz 空間において、点 $(0,0,2)$ を中心とする半径 1 の球面を S_1, 点 $(0,0,-2)$ を中心とする半径 1 の球面を S_2, 点 $(2,0,0)$ を中心とする半径 3 の球面を S_3 とする。

(1) S_1 , S_2 に外接する球面の中心は xy 平面上にあることを示せ。

(2) S_1 , S_2 に外接し S_3 に内接する球面の中心の x 座標を p , y 座標を q とする。点 (p,q) の軌跡を求め、その概形を図示せよ。

５．（理）座標平面上で半径 $r\,(0<r<1)$ の円板 D が、原点を中心とする半径1の円に内接しながらすべらずに転がるとき、D 上の定点 P の動きを調べる。ただし D の中心は原点のまわりを反時計まわりに進むものとする。はじめに D の中心と点Pはそれぞれ $(1-r,0)$, $(1-r+a,0)$ の 位置にあるものとする $(0<a\leqq r)$。

(1) D が長さ θ だけころがった位置にきたとき、点 P の座標 (x,y) を θ を用いて表せ。

(2) D が転がり続けるとき、点 P がいつか最初の位置に戻るための r に対する条件を求めよ。

(3) $r=\dfrac{1}{2}$ のとき、点 P の軌跡を求め、その概形を図示せよ。

６．（文）m は負でない整数とする。3 次方程式 $x^3-3m^2x+18m=0$ がただ 1 つの整数解をもち、それ以外に実数解をもたないような m をすべて求めよ。

７．（理）$f(x)$ は $0<x<1$ で定義された正の値をとる微分可能な関数で $\lim_{x\to 1} f'(x)=\infty$ を満たし、さらに曲線 $C: y=f(x)$ は次の性質をもつという。C 上に任意の点 P をとり、原点 O と点 P を結ぶ直線と x 軸のなす角を x とするとき，点 P における曲線 C の接線と x 軸のなす角は 2θ である。ただし θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲にあるものとする。

(1) $f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(2) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{x}{f(x)}$ とおく。$g(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

８．（文）a , b を正の定数 , n を 2 以上の自然数とする。
2 つの曲線 $y=ax^n$ ($x \geqq 0$) , $x=by^n$ ($y \geqq 0$) によって囲まれた図形の面積を求めよ。

９．（理）正方形の 4 頂点 A , B , C , D を次の規則で移動する動点 Q がある。さいころを振って 1 の目が出れば反時計まわりに隣の頂点に移動し、1 以外の目が出れば時計まわりに隣の頂点に移動する。Q は最初 A にあるものとし、n 回移動した後の位置を Q_n（ $n=1, 2, \cdots$ ）とする。$Q_{2n}=A$ である確率を a_n とおく。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。