1992 年	大阪大学　数学入試問題

１．（理）$f(x)$, $g(x)$ を2次関数とし、2つの放物線 $F: y=f(x)$, $G: y=g(x)$ を考える。ただし、F は下に凸で原点 O を頂点とし、G は上に凸でその頂点 A は O と異なるものとする。G の上の点 P を直線 OA 上にはないようにとる。点 O を通り直線 AP に平行な直線と F との交点のうち、O 以外の点を Q とする。さらに、直線 OA と直線 PQ の交点を R とする。

このとき、線分の長さの比 $\dfrac{AR}{OR}$ は点 P のとり方に関係なく一定であることを示せ。

２．（文）3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。0 でない実数 t をどのようにとっても 2 曲線 $y=f(\mathrm{x})$ と $y=f(x+t)$ が共有点を持たないための必要十分条件を、$f(\mathrm{x})$ の係数を用いて書き表せ。

３．（理） xyz 空間において、x 軸を l とし、2 点（1, 1, 0）と（0, 0, 1）を通る直線を m とする。点 $P(1-t, -t, 1-t)$ を通り、2 直線 l と m の両方に交わる直線 n が存在するための t についての条件を求めよ。また，直線 n の方程式を求めよ。

４．（文）円 $x^2+y^2=1$ を C とし、直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を l とする。C に内接し l に接する円の中心を P とする。P の軌跡のうち y 座標が $\dfrac{1}{2}$ より大きい部分と l によって囲まれる図形の面積を求めよ.

５．（理）2 以上の自然数 n に対して、不等式

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$$

が成り立つことを示せ。

６．（理）断面積が円形である容器がある。空の状態から始めて、単位時間あたり一定の割合で水を注入し、底から測った水面の高さhが10になるまで続ける。水面の上昇する速さvは、水面の高さhの関数として$v=\dfrac{\sqrt{2+h}}{\log(2+h)}$（$0\leqq h\leqq 10$）で与えられるものとする。水面の上昇が始まってから水面の面積が最大となるまでの時間を求めよ。

７．（文）1 辺の長さが 1 の 2 つの正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ および $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ を上下の面とし、これらを 12 個の正三角形 $A_1B_1A_2$, B_1A2B_2 , …… , $B_6A_1B_1$ でつないだ図のような立体図形を考える。次の問いに答えよ。ただし、上下の正六角形がそれらの中心を結ぶ直線と垂直になることは使ってよい。

(1) ベクトル$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2A_3}+\overrightarrow{A_4B_4}+\overrightarrow{B_5A_6}$の長さを求めよ。

(2) 2 つのベクトル$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_5B_5}$と$\overrightarrow{B_1A_2}+\overrightarrow{B_3A_4}+\overrightarrow{B_5A_6}$の内積を求めよ。

８．（理）nを２以上の自然数とする。xy平面上に、1辺の長さが1の正方形の板４枚を、次の２条件を満たすように配置する。

（イ）　各板の４頂点のx座標、y座標は、絶対値がn以下の整数である。

（ロ）４枚の板は互いに重なり合うことはない。

　また、（イ）,（ロ）の条件の下で、どの配置も同様に確からしいものとする。次の問に答えよ。

(1) 頂点の1つが原点となるような板の枚数の期待値を求めよ。

(2) (1)で求めた期待値が$\dfrac{1}{100}$以下となる最小のnを求めよ。