1993年

大阪大学　数学入試問題

１．（理）負でない整数の組 x_0, x_1, x_2, x_3 が $x_{n+1}=x_n{}^3+1$（ $n=0, 1, 2, \cdots$）を満たすとき、以下のことを示せ。

(1) $0\leqq n\leqq 2$ に対し、$x_n x_{n+1}$ は 2 で割り切れる。

(2) x_1 を 9 で割った余りは 0 , 1 , 2 のいずれかである。

(3) $x_1x_2x_3$ は 18 で割り切れる。

２．（文）平面上の帯状領域 $M=\{(x, y);|y|\leqq 1\}$ 内を点 P が次のような運動をする。

（イ）M の内部 $\{(x, y);|y|<1\}$ において P は直進する。

（ロ）M の境界上においては P は図のように等しい角度で反射する。

次の問に答えよ。

n を負でない整数 , $a>0$ とする。原点から傾き a で右方向に出発した点 P が n 回目と $(n+1)$ 回目の反射の間で線分 $y=x-2\left(\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}\right)$ を通過するための a の範囲を n で表せ。

３．（文）1 辺の長さ 2 の正四面体 ABCD と、$\angle\mathrm{APB}>90°$ を満たす空間内の点 P 全体のなす集合 S を考える。

(1) S はどんな集合か。

(2) △ABC と S の交わりの面積を求めよ。

(3) 正四面体 ABCD の表面と S の交わりの面積を求めよ。

４．(理) 1 辺の長さ 2 の正四面体 ABCD の表面上にあって $\angle\mathrm{APB}>90°$ を満たす点 P 全体のなす集合を M とする。

(1) △ABC 上にある M の部分を図示し、その面積を求めよ。

(2) M の面積を求めよ。

５．（文）A を行列 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とする。

(1) A^4 を求めよ.

(2) 自然数 n に対して、$\displaystyle\sum_{k=1}^{4n}A^k$ を求めよ。

６．（理）行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $f(A)=a+d$, $g(A)=bc-ad$ とおく。

(1) $A^2=f(A)A+g(A)E$ を示せ。ただし $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) $n≧1$ のとき、$A^{n+1}=p_nA+q_nE$ を満たすような数 p_n , q_n が存在することを示せ。

(3) 2 次の正方行列 A , B が $f(A)=f(B)>0$ および $g(A)=g(B)≧0$ を満たし、さらに $A^n=B^n$ であるような $n≧2$ が存在するとき、$A=B$ が成り立つことを示せ。

７．（文）点 (0 , 1) を通り曲線 $y=x^3-ax^2$ に接する直線がちょうど 2 本存在するとき、実数 a の値および 2 本の接線の方程式を求めよ。

８．（理）1 から N までの番号を書いたボールが 1 個ずつ入った袋の中から無作為にボールを 1 個取り出す試行を考える。ただし、取り出したボールは番号を記録したのち袋に戻すものとする。

いま A , B 二人の人がいて、A が 5 回、B が 1 回この試行を行う。A が取り出すボールの番号を試行の順に $X_1, X_2, \cdots, X_5$ とし、B が取り出すボールの番号を Y とするとき、次の問に答えよ。

(1) k を N 以下の自然数とする。$Y=k$ であり、さらに $X_1, X_2, \cdots, X_5$ のうち少なくとも 4 つが k 以下であるという事象の確率 $p(N, k)$ を求めよ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_5$ のうち少なくとも 4 つが Y 以下であるという事象の確率を $p(N)$ とする。このとき $\lim_{N\to\infty} p(N)$ を求めよ。

９．（理）$f(x)$ は 2 次の導関数をもち、$f(0)<0$ を満たす関数で、さらに次の性質をもつという。原点を O とし、曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 P(x , y) に対し、点 (x , $y+1$) を Q とするとき、∠OPQ の二等分線が曲線 $y=f(x)$ の点 P における法線になる。

このとき、以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) $g(x)=f'(x)$ とおくとき、$g(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(3) $f(0)=-1$ であるとき、$f(x)$ の形を決定せよ。