1994 年

大阪大学　数学入試問題

１．（文・理）どのような自然数 n に対しても $\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割りきれるような整数 a,b の組 (a,b) は $0<a\leqq 6m$ かつ $0<b\leqq 6m$（ただし m は自然数）の範囲に全体で何組あるか。その個数を m で表せ。

２．（文・理）原点を通る傾き正の直線 l を考える。いま点 P が原点から直線 l に沿って第 1 象限を直進し、直線 l と曲線 $C: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ の交点 $Q\left(a,\frac{1}{\sqrt{3}}a^3\right)$ で反射した後、再び直進する。ただし点 Q において、C の接線に対し、入射角と反射角は等しいとする。反射後の点 P の進行方向が y 軸と平行になるとき、次の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 l と曲線 C が第 1 象限で囲む図形の面積を求めよ。

３．（理）α,β を $0<\alpha<\beta<\pi$ を満たす定数とし、t を変数とする。空間内の曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ を $\begin{pmatrix} x(t)=\sin(t+\alpha) \\ y(t)=\sin(t+\beta) \\ z(t)=\sin t \end{pmatrix}$ で定める。ただし t は $0\leqq t<2\pi$ の範囲で動くこととする。

(1) この曲線は原点を通る平面に含まれることを示し。その平面の方程式を求めよ。

(2) $\alpha=\theta,\beta=2\theta$ とおき、θ を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、(1) で求めた平面と点 $(-1,2,0)$ との距離の最大値を求めよ。

４．（文）放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ と直線 $y=1$ で囲まれる図形を R とする。行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ による 1 次変換を考え、$\overrightarrow{x_0}=\begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_n}=A^n\overrightarrow{x_0}$ とおく。$\overrightarrow{x_n}$ が図形 R に含まれる自然数 n と、そのときの $\overrightarrow{x_n}$ を求めよ。厳密には R とは $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\leqq y\leqq 1$ で定められる図形のことである。

５．（理）各自然数 n に対して曲線 $y=e^{nx}-1$ と円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限における交点の座標を (p_n, q_n) とする。

(1) $x≧0$ のとき不等式 $e^{nx}-1≧nx$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (1)の結果を用いて $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ を証明せよ。

(3) (2)の結果を用いて $\lim_{n\to\infty} q_n$ および $\lim_{n\to\infty} np_n$ を求めよ。

(4) 4 点 $(0, 0), (p_n, 0), (0, q_n), (p_n, q_n)$ を頂点とする長方形の面積を S_n で表し、また曲線 $y=e^{nx}-1$, x 軸、直線 $x=p_n$ で囲まれた図形の面積を T_n で表すことにする。このとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

６．（理）袋の中に白球が 1 個、赤玉が 2 個はいっている。この状態から始めて、次のような試行をくりかえす。袋の中から無作為に球を 1 個取り出し、それが白球であれば袋の中に戻し、赤球であればそれを戻さずに代わりに白球を 2 個袋の中に入れる。k を 2 以上の自然数とする。ただし、$0<a<1$ を満たす数 a に対し $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ であることは用いてよい。

(1) ちょうど k 回の試行の後に、袋の中の球の個数がはじめて 5 になる確率 $p(k)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} kp(k)$ を求めよ。