1995年

大阪大学　数学入試問題

１．（理）次の2つのだ円を考える。

だ円 $A:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　，　だ円 $B:x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

これらに関して、以下の問に答えよ。

(1) だ円Aをだ円Bに移し、点$(2,0)$を点$(\cos\theta, 2\sin\theta)$に移す1次変換を表す行列を求めよ。

(2) だ円Aをだ円Bに移す1次変換をfとする。原点をOとし、2点$(2,0)$, $(0,1)$がfによって移る点をそれぞれP , Qとする。∠POQが最小となるようにfを選んだとき、cos∠POQを求めよ。

２．（文・理）どのような実数xに対しても、不等式

$|x^3+ax^2+bx+c|\leqq|x^3|$

が成り立つように、実数a , b , cを定めよ。

３．（理）正の実数aに対して、$f(x)=a\log x+1$とおく。点$(-a,0)$から曲線$y=f(x)$に接線をひき、接点のx座標をx_0とする。曲線$y=f(x)$とx軸と直線$x=x_0$によって囲まれる部分の面積を$S(a)$で表す。

(1) $S(a)$を求めよ。

(2) $\dfrac{S(a)}{a^2}$の最大値を求めよ。

４．（文）xyz 空間において、平面 $z=0$ 上に原点を中心とする半径 1 の円があり、点 P はこ の円の周上を動く。点 P と点 $(0,0,2)$ を通る直線が平面 $x+y+z=-2$ と交わる点を Q とする。点 Q の z 座標の最大値と最小値を求めよ。

５．（理）$f(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおき、曲線$C:y=f(x)$を考える。1辺の長さaの正三角形PQRは最初、辺QRの中点Mが曲線C上の点$(0,f(0))$に一致し、QRがCに接し、さらにPが $y>f(x)$の範囲にあるようにおかれている。ついで、△PQRが曲線Cに接しながら滑ることなく右に傾いてゆく。最初の状態から、点Rが初めて曲線C上にくるまでの間、点Pのy座標が一定であるように、aを定めよ。

６．（文）原点を O とし、曲線 $y=x^3$ 上の O とは異なる 2 点を $\mathrm{P}(a, a^3)$, $\mathrm{Q}(b, b^3)$ とする。 $a \neq \pm b$ のとき、次の問に答えよ。

(1) 放物線 $y=f(x)$ が 3 点 O , P , Q を通るように 2 次式 $f(x)$ を定めよ。

(2) 積分 $\int_0^a \{x^3 - f(x)\}\,dx$ の値が 0 となるとき、b を a で表せ。

７．（理）自然数nに対して図形T_nを以下のように順に定義する。まずT_1は、3つの点を2つの長さ1の線分で図1のように結んで定義する。一般に図形T_{n+1}は図形T_nを2つと点を1つ用意し、その点とT_nの一番上の点を長さ1の線分で結ぶことにより、図2のように定義する。たとえばT_3は図3のようになる。T_nを通信回路と考える。隣接する2つの点を結ぶ長さ1の通信路が故障しているかどうかは互いに独立であって、その確率はすべてPであるとする。T_nの一番上の点をO , 一番下の2^n個の点の集合をA_nで表す。
Oから A_n のどの点へも通信できない確率をP_nとする。

(1) P_nとP_{n+1}の関係式を求めよ。

(2) $1-P_{n+1} \leqq 2(1-P)(1-P_n)$となることを示せ。

(3) $p > \dfrac{1}{2}$ のとき、 $\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ。

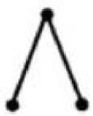
図１：T_1

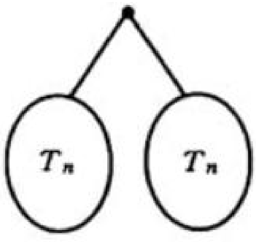

図２：T_{n+1}

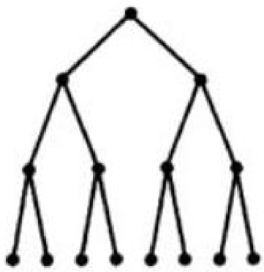
図３：T_3