1996 年

大阪大学　数学入試問題

１．（理）次の2条件(イ)、(ロ) を同時にみたす整数a , bの組(a , b)をすべて求めよ。

(イ) ２次方程式$X^2 + aX + \mathrm{b} = 0$の2つの解が共に2以上の整数である。

(ロ) 不等式$3a + 2b \leqq 0$が成り立つ。

２．（文）a , b , c を 0 以上の実数とする．次の問に答えよ。

(1) $2^a + 2^b \leqq 1 + 2^{a+b}$ を示せ。

(2) a , b , c が $a + b + c = 3$ をみたしながら動くとき $2^a + 2^b + 2^c$ の最大値を求めよ。また、最大値を与える a , b , c の組 (a , b , c) をすべて求めよ。

３．（理）aを正の数として、2平面α , β　$\alpha : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} + z = 1$, $\beta : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} - z = 1$　と2点A(a , 0 , 0) , B(0 , a , 0)を考える。次の問いに答えよ。

(1) 原点O(0 , 0 , 0)の平面αに関する対称点をC , 平面βに関する対称点をDとするとき、C , Dの座標を求めよ。

(2) 直線CDと平面$z = 0$との交点が△ABOの内部（ただし、線分ABを含める）にあるためのaの範囲を求めよ。

(3) $a = 2$とする。点Pが平面α上を動き、点Qが平面β上を動くとき、線分の長さの和OP + PQ + QOの最小値とそのときのP , Qの座標を求めよ。

４．（文）△OABの辺OA , AB , BOのおのおのを t : 1 − t の比に内分する点をそれぞれ P , Q , R とする。ここで t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする.。次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t , $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|} = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは △OAB がどのような三角形のときか。

５．（理）n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $n \log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1) \log n - n + 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 極限値 $\lim_{n \to \infty} (n!)^{\frac{1}{n \log n}}$ を求めよ。

６．（理）中心O , 半径1の円の円周上の2点をP , Qとし、$\angle \mathrm{POQ} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right)$とする。

Pにおける円の接線と直線OQとの交点をR , PからOQに下ろした垂線の足をHとし、弧PQと線分PH , HQで囲まれる部分をDとする。次の問いに答えよ。

(1) △OPRの面積S_1とDの面積S_2に対して$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{S_2}{S_1}$を求めよ。

(2) ORを軸として△OPRを回転させてできる立体の体積V_1とDを回転させてできる立体の体積V_2に対して$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{V_2}{\theta^2 V_1}$を求めよ。

７．（文）曲線 $y = x(x-a)(x-b)(x-c)\ (0 < a < b < c)$ と x 軸との交点を左から順に O , A , B , C とする。線分 OA , AB , BC とこの曲線によって囲まれる部分をそれぞれ S , T , U とする。次の問に答えよ。

(1) S と T の面積が等しくなるための必要十分条件は $3b^2 - 5(a+c)b + 10ac = 0$ であることを示せ.

(2) 上の曲線を y 軸に関して対称移動し、次に x 軸の正の方向に c だけ平行移動してできる曲線の式を求めよ。

(3) S と T と U の面積がすべて等しいとき、b , c を a を用いて表せ.

８．（理）黒玉が2個入っている箱がある。いま、次のような試行を繰り返す。箱から無作為に玉を1個取り出す。もし取り出した玉が黒玉ならばさいころを投げ、出た目が4のときはそれをそのまま箱に戻し、出た目が5以上のときはそれを白玉と取りかえて箱に戻す。もし取り出した玉が白玉ならばそのまま箱に戻す。

n回目の試行が終わったとき箱に入っている白玉の数をX_nとし、$X_n = k$である事象$\{ X_n = k \}$の起こる確率を$P(X_n = k)$で表す。

ただし、$P(X_0 = 0) = 1$とする。次の問いに答えよ。

(1) 事象$\{ X_{n-1} = 0 \}$および$\{ X_{n-1} = 1 \}$のそれぞれのもとで事象$\{ X_n = 1 \}$の起こる条件つき確率を求めよ。

(2) $P(X_n = 1)$を$P(X_{n-1} = 1)$を用いて表せ。

(3) X_n の確率分布を求めよ。

(4) n回目の試行が終わったときに箱に入っている白玉の数がはじめて2個になる確率を求めよ。