1997 年	大阪大学　数学入試問題

１．(理) 座標平面において、x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。x 座標とy 座標がともに 0 以上 3 以下である 16 個の格子点を図1のように線分で結んで得られる図形 L を考える。

動点Aは点$(0,0)$を出発し、点$(3,3)$に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずにx軸の正の方向または y 軸の正の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

動点Bは点$(3,3)$を出発し、点$(0,0)$に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずに x 軸の負の方向または y 軸の負の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

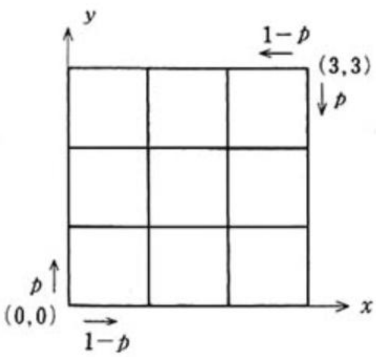
A , B は同時に出発し、A の速さは B の速さの3倍とする。

このとき次の問に答えよ。

(1) AとBが出会う可能性のある L 上の点をすべて求め、それらの座標を書け。

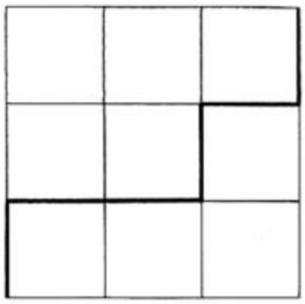
(2) Aは進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の正の方向に、確率 $1-p$ で x 軸の正の方向に進むとする。同様に、Bは進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の負の方向に、確率 $1-p$ で x 軸の負の方向に進むとする。ただし、$0<p<1$とする。このとき、(1) で求めた各点において、AとBが出会う確率をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた確率のうちで、x 座標が最も小さい点で出会う確率が、他のどの確率よりも大きくなるためには p はどのような範囲にあればよいか。



L

図　1



A，Bの経路の例

図　2

２．（理）平面上において、直線 l と l 上にない点 A をとる。

直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする。

直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする。

このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ。

３．（文）数列 $\{a_n\}$ を初項 1，公比 r の等比数列とし、数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 s の等比数 列とする。第 n 項が $x_n = a_n + b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える。 $x_2 = 2, x_4 = 14$ のとき、次の問に答えよ。

(1) r, s を求めよ。ただし $r > s$ とする。

(2) すべての自然数 n について $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ が成り立つことを示せ。

４．（理）楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ と双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2} = 1\ (c > 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(s, t)\ (s > 0, t > 0)$ を双曲線上にとり、原点 O と点 P を結ぶ線分と楕円の交点を Q とする。点 P における双曲線の接線が x 軸と交わる点を A，点 Q における楕円の接線が x 軸と交 わる点を B とする。

点 P を直線 PA と直線 QB が直交するようにとるとき、以下の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) 点 A, B はそれぞれ楕円，双曲線の焦点であることを示せ。

(3) k を $0 < k < 1$ を満たす定数とする。a, b, c が $a^2 + c^2 = 1, a^2 - b^2 = k^2$ を満たしながら変化するとき、直線 PA と直線 QB の交点 R の y 座標が最大となるよう な a, b, c を求めよ。

５．（文）a は 1 より小さい正の定数とする。xy 平面の第 1 象限に、原点 O からの距離が a の点 P をとる。点 P を中心に半径 1 の円を描き、x 軸との交点を A, C，y 軸との交点を B, D とする。ただし、点 A の x 座標、点 B の y 座標はともに正とする。$\angle \mathrm{POA} = \theta$ とおくとき、次の問に答えよ。

(1) 四角形 ABCD の面積 S を a と θ で表せ。

(2) θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲を動くとき、S の最大値および S が最大となるときの θ の値を求めよ。

６．（理）a は実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線のうちで、点 $\mathrm{P}(a,3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。$n(a)$ を求めよ。

７．（文）縦, 横, 高さがそれぞれ x, x, y で, これらの和 $x+x+y$ が一定値 a である直方体を考える。次の問に答えよ。

(1) 直方体の体積 V が最大となるように x, y の値を定めよ.

(2) $a=1$ とする。直方体の表面積を S とするとき、$V-\dfrac{1}{2}S$ が最小となる x, y の値を求めよ。

８．（理）関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し、次の条件を満たす正の数 a を考える。

$$\begin{cases} |\theta|<a \text{ ならば } f(\theta)>0 \\ |\theta|=a \text{ ならば } f(\theta)=0 \end{cases}$$

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C を媒介変数 $\theta\,(-a\leqq\theta\leqq a)$を用いて

$$C:\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

で定める。x 軸に平行な直線 $y=t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の範囲を求め、共有点の x 座標を t で表せ。

(3) 曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を、y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。