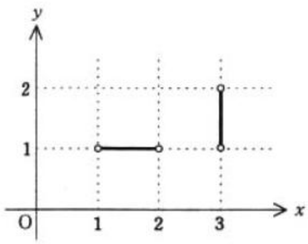
1998年 大阪大学　数学入試問題

１．（理）座標平面において、x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という．。の問に答えよ。

(1) 点 $P(630, 5400)$ を通る直線 $y = ax$ (aは定数) は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

(2) n を 2 以上の整数とする．点 $P(630, 5400)$ を通る曲線 $y = bx^n$ (bは n により定まる定数) は、$0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。



格子辺の例

２．（理）n を 1 以上の整数とする。

n 次の整式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_kx^{n-k} + a_{n-1}x + a_n$ とその導関数 $f'(x)$ の間に $nf(x) = (x+p)f'(x)$ という関係があるとする。ただし、p は定数である。このとき、$f(x) = a_0(x+p)^n$ であることを示せ。

３．（文）平面上の 4 点 O, P, Q, R が条件 $OP = 2$， $OQ = 3$, $\angle OPQ = 60°$, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \vec{0}$ を満たすとする。線分 OR の長さと $\cos\angle POR$ の値を求めよ。

４．（理）(1) a を 1 より大きい実数とする。0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

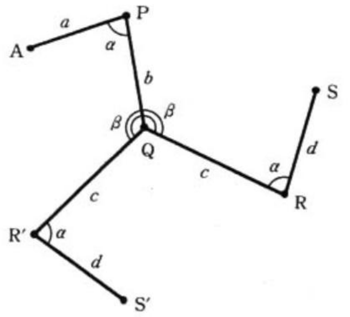
$$\log 2 + \frac{x}{2}\log a \leqq \log(1 + a^x) \leqq \log 2 + \frac{x}{2}\log a + \frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし、対数は自然対数である。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$に対して、$a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく。(1)の不等式を用いて極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

５．（文）単位円周上の 3 点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$，$Q(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，$R(\cos 4\theta, \sin 4\theta)$ を考える。θ が $0°$ から $360°$ まで動くとき PQ^2+QR^2 がとる値の範囲を求めよ。

６．（理）平面上において、7 点 A , P , Q , R , S , R' , S' を下図のようにとる。ただし、$AP=a$, $PQ=b$, $QR=QR'=c$, $RS=R'S'=d$, $\angle APQ=\angle SRQ=\angle S'R'Q=\alpha\ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$ $\angle ROP=\angle POR'=\beta\ (0\leqq\beta\leqq\pi)$ である。このとき$AS^2-AS'^2$ を $\sin\alpha, \sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。



７．（文）放物線 $y=x^2+1$ 上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を $t^2:(1-t^2)\ (0<t<1)$ に内分する点を Q とする。次の問に答えよ。

(1) 点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ.

(3) $0<t<1$ における S の最大値を求めよ.

８．（理）座標空間において,

平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$ 、中心（$0,0,\sqrt{2}$）の円を C_1

平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$ 、中心（$0,0,-\sqrt{2}$）の円を C_2

とする。また、空間内の点 $P(x,y,z)$ に対し、円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき、m と M を r および z で表せ。

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。