1999 年　大阪大学　数学入試問題

１．（理）曲線 $C: y=e^x$ と直線 $l: y=ax+b\ (a>0, b>0)$ が 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ で交わっている。ただし、$x_1<x_2$ とする.

(1) $x_2-x_1=c$ とおくとき、y_1 と y_2 を a と c を用いて表せ。

(2) P と Q の距離が 1 であるとする。曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=x_1$, $x=x_2$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を $V(a)$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a}$ を求めよ。

２．（理）xy 平面上の点 (a, b) は、a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において、3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし、必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってよい。

３．（文）次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上で、次の不等式を満たす点 (x, y) の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$$

(2) 点 (x, y) が (1) の領域を動くとき、$u=\sin(360°\times(x+y))-\sqrt{3}\cos(360°\times(x+y))$ がとる値の範囲を求めよ。

４．（理）平面上に、点 O を中心とし点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5, \mathrm{A}_6$ を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 l を考え、各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする。このとき $\mathrm{D}={d_1}^2+{d_2}^2+{d_5}^2+{d_4}^2+{d_5}^2+{d_6}^2$ は l によらず一定であることを示し、その値を求めよ。ただし、$\mathrm{OA}_k=r$ とする。

５．（理）xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても、平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0, 0, a)$, $(1, 0, a)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても、平面 $y=a$ による立体Lの切り口は 3 点 $(0, a, 0)$, $\left(0, a, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1, a, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。このとき、立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。

６．（文）放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ 上の原点以外の点 P における C の接線を l_1 とし、P を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また l_2 と C が再び交わる点を Q とし、Q における C の 接線を l_3 とする．さらに、l_1 と l_3 との交点を R とする。

(1) 点 $\mathrm{R}(x, y)$ について、y を x の式で表せ。

(2) $\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}$ となる点 P の x 座標の範囲を求めよ。

７．（文）正の整数の組 (a, b) で、a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求め よ．ただし，$a<b$ とする。

８．（理）1 辺の長さが 4 の正方形の紙の表（おもて）を、図のように 1 辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し、A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと、両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても、塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし、2 枚の紙を重ね合わせるときには、それぞれの紙を回転させてもよいが、紙の四隅は合わせることとする。