2000 年　大阪大学　数学入試問題

１．（理）$a>b>0$ とする。円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b\,,\sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線とx軸との交点を P とする。また、円の外部の点（$b\,,c$）からこの円に 2 本の接線を引き、接点をQ , R とする。このとき、2点 Q , R を通る直線は P を通ることを示せ。

２．（理）xy 平面上の 16 個の点からなる集合 $\{(x\,,y)\,|\,x=0\,,1\,,2\,,3\,,\,y=0\,,1\,,2\,,3\}$ を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において、次の事象の起こる確率を求めよ。

「選んだ3点が三角形の頂点となり、その三角形の面積は $\dfrac{9}{2}$ である」

３．（文）点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A , B , C があって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ をみたしている。このとき、三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

４．（理）どのような負でない 2 つの整数 m と n をもちいても $x=5m+3n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。

５．（文）$p\,,q$ を実数 $,q\neq 0$ とする。$p+qi$（$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式 $x^3+px+10=0$ の解であるとき、p と q の値を求めよ.

６．（理）実数 x に対して、x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし

$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}\,]}{n^2}$ とおく。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

７．（文）関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える。$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で、関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。

８．（理）立方体 X と球 Y があって、両者の体積は等しいとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、円周率は$\pi = 3.14\cdots$である。

(1) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。

(2) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点を持つようにしたい。最大何個の辺が共通の点を持つようにできるか。