2006 年　大阪大学　数学入試問題

1.（文） a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

2.（文） 自然数 m , n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式 $\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$ が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 m , n を求めよ。

(2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

3.（文） xy 平面上の点 A(1 , 2)を通る直線 l が x 軸 , y 軸とそれぞれ点 P , Q で交わるとする。点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たすようにとる。ただし，O は平面の原点である。このとき，直線 l の傾きにかかわらず，点 R はある関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。関数 $f(x)$ を求めよ。

4.（理）曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots$ とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ は接していることを示せ。

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y=x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

5.（理）直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l , l' のどちらの上にもない点 A(a , b)をとる。点Aを通る直線 m が2直線 l , l' のそれぞれ点P , P'で交わるとする。点Qを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，Oは xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点Qの軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

6.（理） x , y を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a , b を求めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{{}_nC_r}{x+r}$$

7. (理)三角形OABの辺OA , OB上に，それぞれ点P，Qをとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0 < a < 1 , 0 < b < 1)$$

とする。三角形OABの重心Gが三角形OPQの内部に含まれるための必要十分条件をa , bを用いて表せ。また，その条件を満たす点(a , b)はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形OPQの辺上の点は，三角形OPQの内部に含まれないと考える。

8. (理)一辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC , CD , DA , AB 上に，それぞれ点 P , Q , R , S を

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{QPC}\ ,\ \angle\mathrm{PQC} = \angle\mathrm{RQD}\ ,\ \angle\mathrm{QRD} = \angle\mathrm{SRA}$$

となるようにとる。ただし，点 P , Q , R , S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$で表す。$f(t)$の最大値を求めよ。