

<文系>

1. a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とする。関数 $f(x) = 2x^3 - (6 + 3 \sin a)x^2 + (12 \sin a)x + \sin^3 a + 6 \sin a + 5$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し、その極大値 $M(a)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値、最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ。

2. 円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく。点 Q は A から出発し、A, B, C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて、1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し、2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し、その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。
- (3) p_n を求めよ。

3. 三角形 ABC において、辺 AB の長さを c 、辺 CA の長さを b で表す。 $\angle ACB = 3\angle ABC$ であるとき、 $c < 3b$ を示せ。

<理系>

1. 関数 $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ ($x=0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の最大値を求めよ。
- (2) $f(x)$ とその導関数の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを用いてもよい。
- (3) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、グラフの凹凸を調べる必要はない。

2. 1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$ 、出た目が 2 の場合は $X_k = -1$ 、その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする。

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} X_k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} X_k\right)$$

とおき、 Y_1 から Y_n までの積 $Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし、 i は虚数単位とする。
以下の問いに答えよ。

- (1) Z_2 が実数でない確率を求めよ。
- (2) $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ がいずれも実数でない確率を求めよ。
- (3) Z_n が実数となる確率を p_n とする。 p_n を n を用いて表し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

3. n を 2 以上の自然数とする。三角形 ABC において、辺 AB の長さを c 、辺 CA の長さを b で表す。 $\angle ACB = n\angle ABC$ であるとき、 $c < nb$ を示せ。

4. t を正の実数とする。 xy 平面において、連立不等式 $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1, x + y \leq t$ の表す領域の面積を $S(t)$ とおく。極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - 2 \log t)$ を求めよ。

5. 3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において、辺 BC の長さを a 、辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を固定して b の値を変化させるとき、 V が最大になるのは、三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形になるときである。これを示せ。
- (2) a, b の値をともに変化させるとき、 V の最大値と、最大値を与える a, b の値をそれぞれ求めよ。