2021 年	# 大阪大学　数学入試問題	

＜文系＞

１． a を実数とする。C を放物線 $y=x^2$ とする。

(1) 点 A(a , -1)を通るような C の接線は、ちょうど 2 本存在することを示せ。

(2) 点 A(a , -1)から C に 2 本の接線を引き、その接点を P，Q とする。直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ であることを示せ.

(3) 点 A(a , -1)と直線 $y=2ax+1$ の距離を L とする。a が実数全体を動くとき、L の最小値とそのときの a の値を求めよ。

２． 空間内に、同一平面上にない 4 点 O , A , B , C がある。s , t を $0<s<1$, $0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を 1 : 1 に内分する点を A_0，線分 OB を 1 : 2 に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$に内分する点を Q とする。さらに 4 点 A_0 , B_0 , P , Q が同一平面上にあるとする.

(1) t を s を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1,|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$, $\angle AOB=120^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle COA=60^\circ$，$\angle POQ=90^\circ$ であるとき、s の値を求めよ。

３． 整数 a , b , c に関する次の条件（∗）を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

(1) 整数 a , b , c が（∗）および $a\neq b$ をみたすとき、c^2 を a , b を用いて表せ。

(2) $c=3$ のとき、（∗）および $a<b$ をみたす整数の組(a , b)をすべて求めよ。

(3) 整数 a , b , c が（∗）および $a\neq b$ をみたすとき、c は 3 の倍数であることを示せ。

＜理系＞

１． a , b を $ab<1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 P(a , b)から、曲線 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$に 2 本の接線を引き、その接点を $Q\left(s,\frac{1}{s}\right)$, $R\left(t,\frac{1}{t}\right)$とする。ただし、$s<t$ とする。

(1) s および t を a , b を用いて表せ.

(2) 点 P(a , b)が曲線 $y=\frac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$ ，$y>0$ をみたす部分を動くとき、$\frac{t}{s}$ の最小値とそのときの a , b の値を求めよ。

２． 空間内に、同一平面上にない 4 点 O , A , B , C がある。s , t を $0<s<1$, $0<t<1$ をみたす実数とする。線分 OA を 1 : 1 に内分する点を A_0 , 線分 OB を 1 : 2 に内分する点を B_0 , 線分 AC を $s:(1-s)$に内分する点を P , 線分 BC を $t:(1-t)$に内分する点を Q とする。さらに 4 点 A_0 , B_0 , P , Q が同一平面上にあるとする.

(1) t を s を用いて表せ.

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$, $\angle AOB=120°$, $\angle BOC=90°$, $\angle COA=60°$, $\angle POQ=90°$ であるとき、s の値を求めよ。

３． n を自然数とし、t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする。

(1) $x \geqq t$ のとき、不等式 $-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{1+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\dfrac{1}{n}\log t-\dfrac{1}{2tn^2} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ をみたすような実数 p , q の値を求めよ。

４． 整数 a , b , c に関する次の条件（＊）を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

(1) 整数 a , b , c が（＊）および $a \neq b$ をみたすとき、c は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $c=3600$ のとき、（＊）および $a<b$ をみたす整数の組(a , b)をすべて求めよ。

５． 次の問いに答えよ.

(1) a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち、$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2) 自然数 n に対し、$x-\tan x=n\pi$ かつ$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく。t を$|t|<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。このとき、曲線 C : $y=\sin x$ 上の点 P(t , $\sin t$)における接線が、不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は、t が x_1 , x_2 , x_3 , … のいずれかと等しいことであることを示せ。