2025 年	**大阪大学　数学入試問題**	

1.（文･理）平面上の三角形 OAB を考える。$\angle$AOB は鋭角，OA $=3$, OB $=t$ とする。また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC $=1$ とする。線分 AB を 2：1 に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする.

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ。

(2)　線分 OR の長さを t を用いて表せ。

(3)　線分 OB の中点を M とする。点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

2.（理）p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

(1) $f(\alpha)-f(\beta)$を p と m を用いて表せ。

(2) p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。

3.（理)座標空間に 3 点 O$(0,0,0)$, A$(0,1,1)$, B$(x,y,0)$がある。$\angle$OAP $=30^\circ$ かつ $y\geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$の最大値と最小値を求めよ。

4.（理)次の問いに答えよ。

(1) $t>0$ のとき

$$-\frac{1}{t}<\int_t^{2t}\frac{\sin x}{x^2}\,dx<\frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{\cos x}{x}\,dx=0$ を示せ.

(3)　$f(x)=\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ.

5. (理)投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインがある。A , B , C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う.

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる。
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる。

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる。

最初の文字列は ABC であるとする。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする。

(1) k を正の整数とするとき，$p_{2k}-q_{2k}$ を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，p_n を求めよ。

6. (文)次の条件によって定められる数列がある。

$$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}a_n \quad (n = 1 , 2 , 3 ,\ \cdots)$$

(1) 正の整数 k , l に対して

$$\frac{k}{k+l-1}a_{k+1}a_l + \frac{l}{k+l-1}a_k a_{l+1} = a_k a_l$$

が成り立つことを示せ。

(2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ。

7. (文) 座標平面において，$y = x^2-1$ で表される放物線を C とする. C 上の点 P における C の接線を l とする。ただし，点 P は y 軸上にはないものとする。O を原点とし，放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S，放物線 C と接線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。S−T の最大値を求めよ。