

2021 福岡大学

[I] 次の[]をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 1 とは異なる 2 つの正の数 x, y が $\begin{cases} x^{x+y} = y^{10} \\ y^{x+y} = x^{90} \end{cases}$ をみたすとき、 $x+y = [(1)]$ であり、

さらに $(x, y) = [(2)]$ である。

(ii) 2 つの関数 $f(x), g(x)$ を $f(x) = x^2 - 2x + 3, g(x) = 2x^2 + 6x - 1$ と定める。このとき、 $f(x) \geq g(x)$ をみたす x の値の範囲は $[(3)]$ である。関数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ は、 x に対して $f(x)$ と $g(x)$ のうち、大きくない方を値にもつ関数を表すとする。 x が $-2 \leq x \leq 2$ の範囲にあるとき、 $h(x)$ の最大値を M 、最小値を m とする。このとき $(M, m) = [(4)]$ である。

(iii) 1 辺の長さが 1 の正六角形 OABCDE において、線分 AC を 3:1 に内分する点を P とする。ベクトル \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OE} を用いて表すと $\overrightarrow{OP} = [(5)]$ である。また、 $\triangle OBP$ の面積は $[(6)]$ である。

[II] 次の[]をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 点 (x, y) が不等式 $|x-1| + |y+1| \leq 1$ をみたすように動くとき、 $x^2 - \frac{1}{2}x - y$ の最大値は $[(1)]$ であり、最小値は $[(2)]$ である。

(ii) 自然数 a と b が次の 2 条件

- $a > b,$

- a, b の最大公約数は 10, 最小公倍数は 140

をみたすとき、組 (a, b) をすべて求めると $(a, b) = [(3)]$ である。また、自然数 a, b, c が上の 2 条件に加えて次の 3 条件

- $b > c,$

- a, b, c の最大公約数は 2,

- b, c の最小公倍数は 60

をみたすとき、組 (a, b, c) をすべて求めると $(a, b, c) = [(4)]$ である。

[III] 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ について、次の問に答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(i) x が $x \geq 0$ の範囲にあるとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ii) 部分積分法を繰り返し用いて定積分 $V_n = \int_0^{2n\pi} |f(x)| dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ の値を求

めよ。さらに極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めよ。