数　学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後，まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後，速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
   落丁や乱丁があった場合は，手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後，持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

次の操作を 5 回繰り返し，白玉，赤玉を左から順に 1 列に並べる。

操作：1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出たときには白玉を 1 個おき，他の目が出たときには赤玉を 1 個，次に白玉を 1 個おく。

たとえば，さいころの出た目が順に「1 1 1 5 1」であったとすると，並べられた玉の個数は 6 個で，玉の色は左から順に「白 白 白 赤 白 白」となる。このとき，

- 並べられた玉の個数が 7 個で，左から 3 個目の玉が赤玉である確率は $\boxed{(ア)}$
- 左から 5 個目の玉が赤玉である確率は $\boxed{(イ)}$

である。

2. 曲線 $y=e^{x^2}$ $(x \geqq 0)$ を C とする。実数 a は $a>1$ をみたす定数とし，C 上の点 $(a,\ e^{a^2})$ における接線を ℓ とする。C と 2 直線 ℓ，$x=1$ で囲まれた部分の面積を S_1，ℓ と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) C と y 軸，および 2 直線 $y=e$，$y=e^{a^2}$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

3. a, b は互いに素である自然数の定数で，$a \geqq 2$ とする。$0 < x \leqq \pi$ のとき，

$$\begin{cases} \cos x \leqq \cos 2ax \\ \sin 2ax \leqq 0 \end{cases}$$

をみたす x の値の範囲は，互いに共通部分をもたない n 個の閉区間の和集合であり，それら n 個の閉区間の長さの値を小さい方から順に x_1, $\ldots$, x_n とする。$k = 1$, $\ldots$, n に対し $\theta_k = 2b(2a+1)x_k$ とおき，xy 平面において，一般角 θ_k の動径と単位円との交点を Z_k とするとき，次の問いに答えよ。ただし，動径は原点を中心とし，x 軸の正の部分を始線とする。

(1) $n = a$ であり，$\theta_k = 2k\pi\dfrac{b}{a}$ $(k = 1, \ldots, a)$ と表されることを示せ。

(2) $k = 1$, $\ldots$, a に対し，kb を a で割ったときの商を q_k，余りを r_k とする。$1 \leqq i < j \leqq a$ をみたす任意の自然数 i, j に対し $r_i \neq r_j$ を示し，点 Z_1, $\ldots$, Z_a は単位円を a 等分する a 個の分点であることを示せ。

4. 実数 t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。1 辺の長さが 1 の正方形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ があり，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を次のように帰納的につくる。

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ がつくられたとき，

- 各辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n, \mathrm{B}_n\mathrm{C}_n, \mathrm{C}_n\mathrm{D}_n, \mathrm{D}_n\mathrm{A}_n$ を $t : 1-t$ に内分する点を，順に $\mathrm{H}_n, \mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n, \mathrm{K}_n$ とする。
- $\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$ の交点 A_{n+1}，$\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$ と $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_n$ の交点 B_{n+1}，$\mathrm{C}_n\mathrm{H}_n$ と $\mathrm{D}_n\mathrm{I}_n$ の交点 C_{n+1}，$\mathrm{D}_n\mathrm{I}_n$ と $\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n$ の交点 D_{n+1} を頂点として，四角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ をつくる。

$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n$ の面積を a_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が $\dfrac{1}{8}$ となるような定数 t の値を求めよ。