数　　学

1) a, b を実数とし, x を未知数とする方程式 $x^4 - 2ax^2 + b = 0$ が相異なる 4 個の実数解をもつとする。このとき, ab 平面上において点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

2) さいころを繰り返し投げながら, xy 平面上の原点を出発点として点 P を次のルールで動かしていく：1，2の目が出たら P の x 座標だけを 1 増やし, それ以外の目が出たら P の y 座標だけを 1 増やす。この試行は, 点 P の x 座標または y 座標のどちらかが 4 になったらそこで終了するものとする。このとき点 P の x 座標が 4 となって終了する確率を求めよ。

3) 0 でない実数 x, y, z が $2^x = 3^y = 72^z$ をみたすとき, 等式 $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{1}{z}$ が常になりたつように整数 a, b を定めよ。($2^A = 3^B$ をみたす整数は $A = 0$, $B = 0$ しかないことを用いてよい)

4) 次の極限値を求めよ。(ヒント : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる)

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$