

数 学

2019 年度 (平成 31 年度)

入 学 試 験 問 題

受 験 号	
-------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 6 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は , , の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の , などの には、数値または符号 (+ , -) が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

- 1 半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円に内接する四角形 ABCD において、三角形 ABD は正三角形であるとする。線分 AC と線分 BD の交点を E とし、点 E は BD を 1 : 2 に内分する点であるとする。

(1) $|\vec{AB}| = \boxed{\text{ア}}$, $|\vec{AD}| = \boxed{\text{イ}}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $\vec{AE} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \vec{AD}$ であり、 $|\vec{AE}|^2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

- (3) 点 A を通る直径の他端を F とすると、

$\vec{AF} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \vec{AD}$ であり、 $\vec{AF} \cdot \vec{AE} = \boxed{\text{ソ}}$ である。

実数 t を用いて $\vec{AC} = t\vec{AE}$ とおくと、 $\vec{AC} \cdot \vec{FC} = \boxed{\text{タ}}$ であるから、

$t = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ となる。

- (4) 正三角形 ABD の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり、四角形 ABCD の面積は

$\frac{\boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

計 算 用 紙

2 箱 A には赤球 1 個と白球 1 個が、箱 B には赤球 1 個と白球 2 個が入っている。2 つの箱から同時に 1 個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。 n 回の操作後、箱 A に、赤球が 2 個入っている確率を a_n 、赤球が 1 個だけ入っている確率を b_n 、赤球が入っていない確率を c_n とする。

$$(1) a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, b_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ である。}$$

(2) 任意の自然数 n について、

$$a_n + b_n + c_n = \boxed{\text{オ}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} c_n$$

が成り立つ。

(3) A, B, C を実数とし, b_n に関する漸化式

$$b_{n+2} + A b_{n+1} - B b_n = C$$

が成り立つとする。

(i) $A = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$, $B = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$, $C = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(ii) $p_n = b_n - x$ とし, $p_{n+2} + A p_{n+1} - B p_n = 0$ が成り立つとする。

このとき, $x = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

さらに, 実数 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ が $(p_{n+2} - \alpha p_{n+1}) = \beta (p_{n+1} - \alpha p_n)$

を満たすとする。このとき $\alpha = -\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$, $\beta = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

このことから, 任意の自然数 n について,

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} a^n + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}} \beta^n + \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

が成り立つ。したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ となる。

3 $0 \leq t \leq \pi$ とする。原点を O とし、点 A の座標を $(\cos t, \sin t)$ とする。点 O を、点 A を中心に時計回りに $3t$ 回転移動させた点を P とし、点 P の座標を $(f(t), g(t))$ とする。

(1) $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ により、

$$f(t) = \cos t \boxed{\text{ア}} \cos \boxed{\text{イ}} t, \quad g(t) = \sin t \boxed{\text{ウ}} \sin \boxed{\text{エ}} t$$

である。ここで、 $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は、それぞれ、符号 $+$ 、 $-$ のいずれかである。

(2) $t = a$ において $f(t)$ が最大値をとるとき $\cos a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり、
 $f(a) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3) $0 < c < \pi$ とし、 $t = c$ のとき点 P は原点にあるとする。

(i) $c = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

(ii) $\int_0^c \sin^2 t \, dt = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$,

$\int_0^c \sin t \sin 2t \, dt = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(iii) t が $0 \leq t \leq c$ の範囲を動くとき、点 P が描く曲線で囲まれる図形の面積を S とする。 $S = \int_0^c g(t)f'(t) \, dt$ が成り立つことを用いると、

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

である。

計 算 用 紙

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか 1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, … で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕

ア

イ	ウ
---	---

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えてください。

〔例2〕

エ

オ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9